

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
CAMPUS TIMÓTEO**

Samara Silva Santos

**UMA ABORDAGEM MULTI OBJETIVO PARA O PROBLEMA DE  
ROTEAMENTO DE TRANSPORTE PÚBLICO**

**Timóteo**

**2017**

**Samara Silva Santos**

**UMA ABORDAGEM MULTI OBJETIVO PARA O PROBLEMA DE  
ROTEAMENTO DE TRANSPORTE PÚBLICO**

Monografia apresentada à Coordenação de Engenharia de Computação do Campus Timóteo do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: André Rodrigues da Cruz

Timóteo

2017

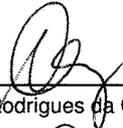
**Samara Silva Santos**

**UMA ABORDAGEM MULTI OBJETIVO PARA O PROBLEMA DE  
ROTEAMENTO DE TRANSPORTE PÚBLICO**

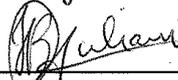
Monografia apresentada à Coordenação de Engenharia de Computação do Campus Timóteo do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: André Rodrigues da Cruz

Trabalho aprovado. Timóteo, 13 de julho de 2017:



\_\_\_\_\_  
André Rodrigues da Cruz (Orientador)



\_\_\_\_\_  
João Batista Queiroz Zuliani



\_\_\_\_\_  
Douglas Nunes Oliveira

Timóteo, 13 de julho de 2017

Dedico aos  
meus pais.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por seu amor, bondade e fidelidade que me alcançaram todos os dias. Sem essa a graça tão maravilhosa seria impossível chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais pela paciência e confiança que em mim depositaram. Pai e mãe, vocês são os melhores do mundo. Agradeço também ao meu namorado Luamós Úride, pelo amor, carinho e paciência em todos esses anos.

Agradeço ao meu orientador André Rodrigues da Cruz, pela disponibilidade, competência, e apoio. Agradeço a todos os professores e toda a equipe CEFET-MG Timóteo.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para eu chegar até aqui.

*“Deleita-te no Senhor e Ele concederá os desejos do teu coração.  
Entrega o teu caminho ao Senhor, confia nele, e Ele o fará.”.*  
Salmos 37:4-5

# Resumo

O serviço de transporte público coletivo constitui uma necessidade básica da população brasileira, visto que grande parcela das pessoas utilizam esse tipo de transporte no cotidiano. Por causa disso, melhorias que aperfeiçoem o atendimento à população, e que limitem os custos em se fazer a coleta e entrega de passageiros, são interessantes e trazem grande contribuição social. Na perspectiva das empresas de transporte, as rotas mais atraentes a serem percorridas são aquelas em que se atende a maior quantidade de pessoas possível, percorrendo, concomitantemente, a menor distância possível. O problema de se gerar um conjunto de rotas que atenda a ambos os objetivos pode ser tratado como um problema de otimização multiobjetivo, visto que possui dois objetivos conflitantes a serem otimizados. Em virtude disso, neste trabalho foi desenvolvido uma aplicação da técnica de evolução diferencial para problemas multiobjetivo para determinar um conjunto de soluções não dominadas globalmente. Foram propostos dois algoritmos com modificação quanto ao operador de cruzamento e feita a comparação entre os resultados desses para se determinar qual algoritmo é melhor, ou se possuem desempenhos equivalentes. Também é apresentada uma entrevista feita à empresa de ônibus que atende o município de Timóteo, a fim de se verificar quão próximo as restrições do modelo proposto se aproximam ao praticável pela empresa na cidade. Finalmente, apresenta-se os resultados e as conclusões obtidas.

**Palavras-chave:** Otimização Multiobjetivo, Roteamento de Transporte Público, Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo, Evolução Diferencial para Otimização Multiobjetivo.

# Abstract

The collective public transportation service is a basic necessity of the Brazilian population, since a large part of the population use this type of transportation in daily life. Because of this, it is necessary improve the service, and to limit the costs of collecting and delivering passengers, in order to bring great social contribution. From the point of view of transport companies, the most attractive routes to be traveled are those in which the largest possible number of people are served, while traveling as short as possible. The problem of generating a set of routes that meets both objectives can be treated as a multiobjective optimization problem, since it has two conflicting objectives to be optimized. In this work, an application of the differential evolution technique for multiobjective problems was developed to determine a set of non dominated solutions. Two algorithms were proposed with modification regarding the crossover operator and the results were compared to determine which one is the best, or if their performance are equivalent. An interview with the bus company that serves the municipality of Timoteo is also presented, in order to verify how close the constraints of the proposed model are approaching that practicable by the company in the city. Finally, the results and the conclusions obtained are presented.

**Keywords:** Multiobjective Optimization, Public Transport Routing, Multiobjective Evolutionary Algorithm, Differential Evolution for Multiobjective Optimization.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Conceito de dominância em um POM. . . . .	20
Figura 2 – Algoritmo DEMO para roteamento de transporte público. . . . .	23
Figura 3 – Pseudocódigo para o cruzamento usando duas soluções. . . . .	27
Figura 4 – Pseudocódigo para o cruzamento usando três soluções. . . . .	27
Figura 5 – Cruzamento com duas soluções. . . . .	28
Figura 6 – Fases da DEMO aplicada ao roteamento de veículos. . . . .	29
Figura 7 – Grafo de uma região fictícia. . . . .	29
Figura 8 – Rotas geradas pelo processo de inicialização. . . . .	32
Figura 9 – Representação gráfica do hipervolume em duas dimensões. . . . .	38
Figura 10 – Representação gráfica das soluções produzidas pelos Algoritmos 1 e 2. . . . .	45
Figura 11 – Soluções não dominadas da primeira execução do Algoritmo 1 e ponto de referência. . . . .	46
Figura 12 – Soluções não dominadas globalmente. . . . .	48
Figura 13 – Soluções não dominadas globalmente. . . . .	49

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Exemplos de aplicação da DEMO para problemas reais. . . . .	24
Tabela 2 – Arestas do grafo da região fictícia da Figura 7 e seus respectivos pesos (distância e demanda). . . . .	30
Tabela 3 – Rotas geradas na inicialização pelo BFA. . . . .	31
Tabela 4 – População de rotas filhas. . . . .	34
Tabela 5 – Exemplo de rota que sofreu mutação. . . . .	34
Tabela 6 – População de rotas filhas após processo de mutação. . . . .	35
Tabela 7 – População de rotas pais e filhas. . . . .	35
Tabela 8 – Resultado do processo de seleção. . . . .	36
Tabela 9 – Resultado do processo de ordenação pela não dominância. . . . .	36
Tabela 10 – Rotas geradas na inicialização pelo BPA. . . . .	37
Tabela 11 – Organização da matriz de hipervolumes. . . . .	39
Tabela 12 – Distância entre os vértices de uma rota não dominada gerada pelo Algoritmo 1. . . . .	42
Tabela 13 – Distância entre os pontos de ônibus de uma rota não dominada gerada pelo Algoritmo 1. . . . .	43
Tabela 14 – Matriz de objetivos gerada pelo Algoritmo 1. . . . .	44
Tabela 15 – Matriz de objetivos gerada pelo Algoritmo 2. . . . .	44
Tabela 16 – Matriz de hipervolumes. . . . .	47
Tabela 17 – Soluções não dominadas globalmente. . . . .	57
Tabela 18 – Soluções não dominadas Algoritmo 1. . . . .	60
Tabela 19 – Soluções não dominadas Algoritmo 2. . . . .	63

# Lista de abreviaturas e siglas

AE	Algoritmo Evolutivo
AEM	Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo
BP	Busca em Profundidade
BPA	Busca em Profundidade Aleatória
DE	Evolução Diferencial
DEMO	Evolução Diferencial para Otimização Multiobjetivo
POM	Problema de Otimização Multiobjetivo
PRV	Problema de Roteamento de Veículos

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Relevância</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
1.2.1	Objetivo Geral	15
1.2.2	Objetivos Específicos	15
<b>1.3</b>	<b>Estrutura da Monografia</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Estado da Arte</b>	<b>18</b>
3.1.1	Otimização no Roteamento de Veículos	18
3.1.2	Otimização Multiobjetivo	19
3.1.3	AE para Tratamento de POM	20
3.1.4	Evolução Diferencial	21
3.1.4.1	Evolução Diferencial para Problemas Multiobjetivo	23
<b>4</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>25</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>25</b>
<b>4.2</b>	<b>DEMO</b>	<b>26</b>
<b>4.3</b>	<b>Exemplo de Aplicação</b>	<b>28</b>
4.3.1	Exemplo com Cruzamento de Duas Soluções	31
4.3.2	Exemplo com Cruzamento de Três Soluções	36
<b>4.4</b>	<b>Hipervolume</b>	<b>37</b>
<b>4.5</b>	<b>Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>41</b>
<b>5.1</b>	<b>Ambiente de Teste</b>	<b>41</b>
<b>5.2</b>	<b>Entrevista à Empresa de Ônibus</b>	<b>48</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>50</b>
<b>6.1</b>	<b>Conclusão</b>	<b>50</b>
<b>6.2</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>52</b>
	<b>ANEXO A – TABELAS</b>	<b>57</b>
	<b>ANEXO B – ENTREVISTA À EMPRESA DE ÔNIBUS QUE ATENDE A CI- DADE DE TIMÓTEO</b>	<b>66</b>

# 1 Introdução

No Brasil, grande parte da população faz uso de transporte público nas atividades diárias. Disponibilizar e regulamentar esse serviço para atender a população de forma eficaz e satisfatória é uma das necessidades básicas que devem ser garantidas. Pois o uso de transporte público coletivo é essencial no desenvolver das principais atividades que são indispensáveis para o desenvolvimento socioeconômico (BRASIL. Presidência da República, 2012).

A prestação do serviço de coleta e entrega de passageiros geralmente é concedido às empresas privadas, sendo um objetivo comum às mesmas melhorar a lucratividade. Existem duas formas para tal: a primeira seria elevando o valor do serviço, repassando essa cobrança na tarifa paga pelo usuário. Já a segunda seria otimizando a prestação de serviço para reduzir os gastos no processo de fornecimento do mesmo. Todavia, por se tratar de um serviço de utilidade pública, é indispensável que o interesse público seja priorizado, e por isso o valor da tarifa não pode ser elevado arbitrariamente. Por causa disso, é de suma importância determinar rotas que minimizem o percurso das linhas e ao mesmo tempo maximizem a demanda atendida.

De acordo com (BRASIL. Presidência da República, 2012), a política tarifária do transporte público coletivo brasileiro é norteado por certas diretrizes, dentre as quais está melhorar a eficiência e eficácia da prestação de serviço. Também é explanado que a remuneração do serviço prestado deve cobrir os custos decorrentes de se fazê-lo, bem como remunerar ao prestador. Diante disso, percorrer rotas mais adequadas que possibilitem um melhor atendimento à população, e ao mesmo tempo, tenha um menor custo possível, pode ser uma alternativa interessante para evitar aumentos da tarifa e fornecer um serviço de melhor qualidade.

Segundo Mendes (2016), o Problema de Roteamento de Veículos (PRV) é um dos mais estudados na área de Otimização Combinatória e Pesquisa Operacional, tendo em vista que tanto o transporte coletivo de passageiros, como o de mercadorias, possuem grande aplicabilidade prática .

A literatura aborda diversas estratégias de otimização para a melhoria na oferta de transporte público, cada uma das quais com diferentes objetivos. Steiner et al. (2000) abordam esse problema no estudo de caso de transporte escolar na cidade de Curitiba, Paraná, para o serviço de coleta e entrega de alunos. Foi levado em consideração a quantidade de alunos atendida, os pontos de demanda, a capacidade dos veículos e o limite de tempo. O trabalho teve o intuito principal de minimizar a distância total percorrida pela frota, e a quantidade de veículos a serem utilizadas para a prestação desse serviço.

No estudo sobre problema do atendimento de itinerários pré-estabelecidos, em que os veículos transportam poucos passageiros e os passageiros atendidos encontravam-se normalmente insatisfeitos pela demora no atendimento, Santana et al. (2012) utilizaram uma abordagem baseada em algoritmos genéticos, sob o intuito de otimizar o atendimento, tornando o itinerário mais dinâmico.

Em Arbex (2017) foi utilizado uma abordagem multiobjetivo, com algoritmos genéticos, para o problema do projeto de redes de transporte público, realizado por ônibus, e a frequência de fornecimento desse serviço. O estudo foi feito com a finalidade de minimizar o custo no fornecimento do serviço, que é proporcional à frota utilizada e à quilometragem percorrida, e de melhorar o atendimento ao usuário, no qual foi considerado o tempo de espera, o tempo de viagem, dentre outros.

Kulkarni e Bhave (1985) formularam o problema de roteamento de veículos como um Problema de Programação Inteira Binária; Já Braga e Nunes (2014), utilizaram algoritmos genéticos para o roteamento de transporte público que atende à cidade de Rio Paranaíba, sob a ótica mono-objetivo. Além desses, diversos outros autores também abordaram o assunto, como Fonseca et al. (2012), Vieira (2015) e Aquino et al. (2015).

Em otimização, existem problemas mono-objetivo e multiobjetivo. Esses primeiros são aqueles que possuem apenas um objetivo. Já os Problemas de Otimização Multiobjetivo (POM) apresentam mais de objetivo, e esses são necessariamente conflitantes entre si. Uma abordagem multiobjetivo trata esses objetivos de forma simultânea, considerando todos os objetivos concomitantemente (ÁVILA et al., 2006).

O Problema de Roteamento de Transporte Público pode ser visto como um POM, pois é necessário haver o equilíbrio entre a demanda atendida e o valor do custo em atendê-la. Obter o maior faturamento implica em atender a maior demanda possível, e de forma análoga, o menor custo sugere percorrer a menor distância possível. Em razão disso, diz-se que esses objetivos são adversos entre si, já que dado uma solução com um critério em valor ótimo, melhorando-se separadamente um outro objetivo, implica em piorar o primeiro.

Algumas pesquisas mostraram que Algoritmos Evolutivos (AE) produzem resultados interessantes para POM. Segundo Reddy e Kumar (2007), estudos enfatizam que AEs são alternativas atrativas para resolver POM e são usados para resolver muitos problemas práticos porque eles são independentes da representação do problema (DEB, 2001).

Dentre os diversos AE, um que tem se destacado é a Evolução Diferencial, *Differential Evolution* (DE). Segundo Oliveira (2006), a principal característica da DE é a produção de novos indivíduos por meio da chamada adição diferencial, que consiste na soma da diferença

vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios de uma população, a um determinado indivíduo, o que faz com que haja uma “perturbação” na população. A técnica é atraente, pois, além de ser poderosa, é também tida como simples e adequada para a solução de diversos problemas de otimização. De acordo com Rocha e Saramago (2011) a DE utiliza-se do processo de mutação, seguida do processo de cruzamento e seleção, para escolha da melhor solução. As autoras ressaltam a aplicabilidade da DE em diversas classes de problemas, rapidez de convergência e precisão, justificam o uso do método.

A DE tem obtido resultados satisfatórios tanto para problemas mono-objetivo quanto multiobjetivo. Por se tratar de um POM, ao problema do transporte público pode ser aplicado a Evolução Diferencial para Otimização Multiobjetivo (DEMO), para se obter o conjunto de rotas ótimas. As vantagens apresentadas como simplicidade, rapidez de convergência e aplicabilidade tanto para problemas de otimização mono-objetivo como para POMs, tornam-na interessante para o problema apresentado (PESSÔA; COELHO, ).

Nesse trabalho é tratado o POM de se determinar um conjunto de rotas adequado para atender uma determinada região. Dado um grafo de uma cidade, um ponto inicial, um ponto final, e um conjunto de atributos, utilizou-se uma aplicação da DEMO desde a geração de rotas até a definição de um conjunto de soluções não dominadas global.

Nesse contexto, algumas definições são relevantes, as quais são apresentadas a seguir. Uma solução é uma rota (conjunto de vértices que simboliza o caminho a ser percorrido desde o ponto inicial ao ponto final), juntamente com o peso da distância que o ônibus percorre, o da demanda total atendida pela rota em questão e a informação sobre a localização dos pontos de ônibus.

As soluções devem respeitar o seguinte conjunto de restrições. Não pode haver ciclo(s) na rota, os pontos de ônibus devem estar localizados sobre vértices e pontos consecutivos devem estar entre uma distância mínima e máxima.

Para este fim, foi elaborado uma versão da DE multiobjetivo que inicialmente gera a população pai, um conjunto de rotas aleatórias, por meio do algoritmo de busca em profundidade aleatória. A partir daí, para se gerar novas rotas, foram utilizados os processos de cruzamento e de mutação, obedecendo-se uma determinada taxa. Em seguida, tais rotas são avaliadas e ordenadas pela não dominância.

Nesse contexto, foram aplicadas duas versões de algoritmos para o processo de cruzamento. Em uma é utilizado duas soluções e na outra três soluções, de forma que a aplicação converge para um conjunto de soluções não dominadas para cada versão.

Ao fim desse trabalho, são comparados os resultados de ambas as versões e feito a análise dos resultados obtidos utilizando o teste estatístico U de Mann-Whitney. Finalmente, os demais resultados são apresentados, seguida das conclusões obtidas e considerações finais.

## 1.1 Relevância

Sabendo que o serviço de transporte público é direito de todos cidadãos brasileiros, e que está presente no cotidiano de uma parte considerável da população, melhorias no fornecimento desse tipo de serviço constitui benefício de utilidade pública, contribuindo para o desenvolvimento e bem estar social.

Estabelecer rotas ótimas sob o ponto de vista multiobjetivo, que diminuam os custos em se fazer a coleta e entrega de passageiros, e maximize a quantidade de pessoas a serem atendidas, gera como consequência uma maior lucratividade por parte da empresa e possível satisfação do cliente. Isso possibilita melhorar a oferta de transporte público, de modo que o cliente passa a se deslocar menos e como consequência direta, aumenta-se o contentamento com o serviço oferecido.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Modelar e aplicar um procedimento de otimização multiobjetivo para determinação de rotas de transporte público de uma região, minimizando a distância percorrida e maximizando, concomitantemente, uma métrica de atendimento da localidade. As soluções devem respeitar as restrições de caminho sem ciclo, cada ponto de ônibus deve estar localizado sobre vértices da rota, dois pontos consecutivos estão entre uma distância mínima e máxima, e uma aresta é atendida se está a uma distância máxima dada da rota.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Os específicos deste trabalho são:

1. Fazer levantamento da revisão bibliográfica do assunto;
2. Elaborar o modelo matemático de otimização multiobjetivo cujas funções objetivo maximizem a demanda atendida e minimize a distância percorrida, sujeito as restrições do problema;
3. Elaborar um algoritmo que obtenha as melhores rotas não dominadas possíveis;
4. Determinar o conjunto de rotas não dominadas, dado um ponto inicial e final utilizando um algoritmo evolutivo;

5. Utilizar duas versões quanto ao operador de cruzamento e verificar se um se sobressai em relação ao outro;
6. Comparar teoricamente o modelo adotado neste trabalho ao que é realizado por uma empresa de transporte público.

### 1.3 Estrutura da Monografia

Esta monografia está estruturada conforme a seguir:

- O Capítulo 2 expõe os procedimentos metodológicos através dos quais este trabalho se desenvolve, e apresenta os procedimentos para alcançar os objetivos inicialmente propostos;
- O Capítulo 3 desenvolve a revisão da bibliografia, a qual retrata problemas similares, e os procedimentos utilizados para solucioná-los;
- No Capítulo 4 é feito o detalhamento do escopo do problema, a formulação do problema matemático, as particularidades do problema, e o tratamento dado a cada uma dessas;
- No Capítulo 5, é apresentado o ambiente de teste utilizando, seguido dos resultados obtidos e das devidas discussões;
- Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e considerações finais, principais contribuições, limitações e indicações para trabalhos futuros.

## 2 Metodologia

Esta pesquisa científica quantitativa, e de caráter exploratório, seguiu os seguintes passos para atingir os objetivos inicialmente propostos:

1. Realização da pesquisa bibliográfica para melhor conhecimento do método adotado, identificação de outras abordagens para resolver problemas da mesma natureza e reconhecimento da aplicação da metodologia adotada para solução de situações similares;
2. Elaboração de um modelo matemático que limite o escopo do problema e estabeleça as diversas considerações a serem tratadas;
3. Aplicação da técnica proposta em uma cidade fictícia em forma de grafo, definindo os vértices e pesos das arestas;
4. Construção de um algoritmo de busca em profundidade aleatória para obter diferentes rotas, de um vértice inicial a um final;
5. Implementação do algoritmo de evolução diferencial para otimização multiobjetivo para encontrar o conjunto de rotas não dominadas;
6. Determinação da distância e demanda atendida para cada rota do conjunto de soluções não dominadas;
7. E utilização de técnicas estatísticas adequadas para comparação das duas versões de cruzamento.

## 3 Revisão Bibliográfica

Esse estudo foi inicializado com o levantamento do estado da arte, tanto no que diz respeito aos trabalhos já existentes em relação ao PRV, como no que tange à metodologia escolhida, e de outras dentro do grupo AEs para o tratamento desse e de outros POMs. Esse conhecimento possibilitou compreender as abordagens já existentes, analisar as vantagens e desvantagens das mesmas, além de conhecer domínios de problemas semelhantes.

### 3.1 Estado da Arte

O estado da arte deste estudo diz respeito a três assuntos que assumem maior importância nesse contexto: Tratamento do PRV, em especial na modalidade coleta e entrega, isto é, quando há um ponto de partida e diversos pontos de demanda. Em seguida é apresentado o uso de AE para tratamento de problemas multiobjetivo e o crescimento da empregabilidade dessa classe de algoritmos para resolver POM. E, finalmente, o uso da DE em algumas aplicações.

#### 3.1.1 Otimização no Roteamento de Veículos

Existem alguns algoritmos de roteamento que determinam o caminho mais curto entre dois vértices de um grafo, dentre eles, o algoritmo de Dijkstra (SKIENA, 1990) e o Busca A Estrela (NOSRATI; KARIMI; HASANVAND, 2012). Contudo, problemas reais trazem restrições práticas que devem ser consideradas na definição do melhor caminho, ao qual muitas vezes não é o mais curto. Nesses casos, a abordagem mono-objetivo, e que leve em consideração apenas a distância total percorrida, pode ser insuficiente ou inadequada para obtenção de resultados úteis.

Em função disso, diversos autores trataram problemas semelhantes na concepção multiobjetivo: Aquino et al. (2015) aborda o Problema de Roteamento de Veículos em que o atendimento deve obedecer uma janela de tempo definida. Nesse contexto, buscou-se tratar os múltiplos objetivos do problema, minimizando a distância total percorrida, e o desequilíbrio nas distâncias e cargas dos veículos. Foi utilizado duas abordagens para tal, sendo a primeira fundamentada na meta-heurística *Iterated Local Search* e a segunda baseada no uso de um Algoritmo Genético (AG).

Em seu estudo, Mendes (2016) utilizou uma abordagem evolutiva para tratar o problema multiobjetivo de roteamento de veículos relativos a demanda, aplicáveis às situações em que vários clientes usam um mesmo veículo, como micro-ônibus ou táxi, para reduzir os custos finais do transporte.

Azuma (2011), por sua vez, retrata a logística, na perspectiva do fornecedor, na atividade de distribuição dos produtos para vários clientes, dentro de um limite de tempo. Esse problema também foi tratado na ótica multiobjetivo, no qual procurou-se minimizar o custo do transporte, minimizando simultaneamente, o estoque. Para tal, a autora baseou-se no algoritmo SPEA2 e acrescentou modificações na representação de soluções candidatas, e também dos operadores genéticos e de busca local.

E finalmente, Assis (2013) trabalhou o Problema Multiobjetivo de Roteamento de Veículos para serviço de coleta e entrega, e nesse projeto, buscou-se minimizar o custo de transporte e, concorrentemente, maximizar o atendimento às solicitações de coleta.

### 3.1.2 Otimização Multiobjetivo

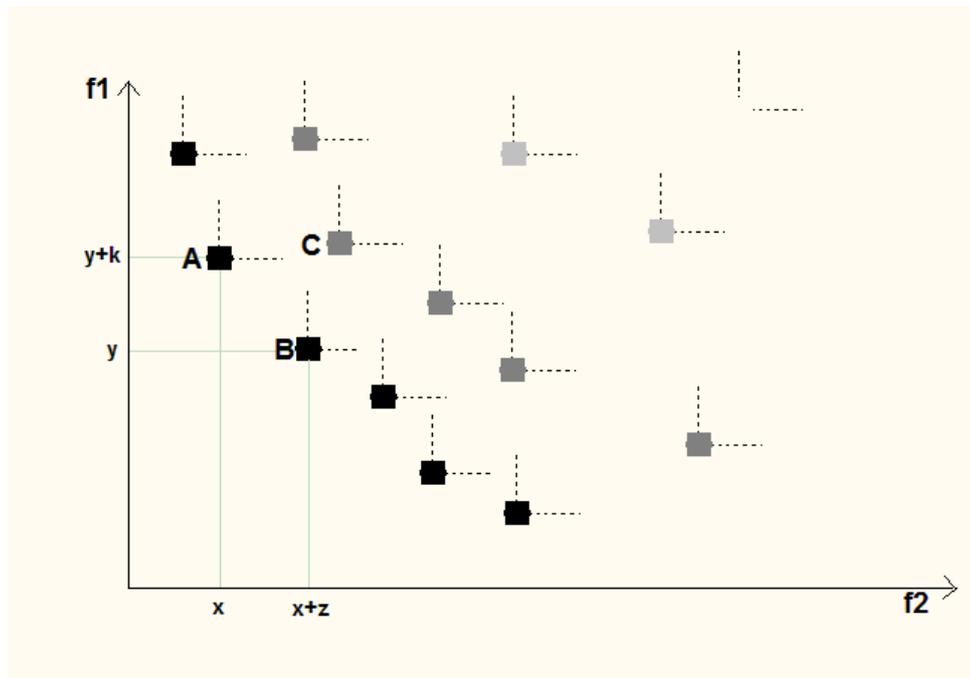
Um problema é classificado como multiobjetivo quando apresenta mais de um critério de qualidade conflitante. Em um POM as soluções ótimas devem, além de obedecer um conjunto de restrições, ter uma relação de compromisso entre os objetivos, de forma que em uma solução ótima a única forma de melhorar um critério seja, obrigatoriamente, piorar algum outro (DEB, 2001).

Haja vista essa heterogeneidade entre os objetivos, soluções extremas, que são ótimas sob a ótica de apenas um dos objetivos, não pode ser a única solução ótima do problema multiobjetivo. Ou seja, não é possível obter uma solução ótima que otimize simultaneamente todos os objetivos do POM (GASPAR-CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012). Em virtude disso, o conjunto de soluções ótimas conterà um equilíbrio entre os objetivos e permeará as soluções que não sejam dominadas por outras.

A Figura 1 exibe alguns pontos sobre o plano das funções  $f_1$  e  $f_2$ , e são destacados os pontos A, B e C. Ao analisar o gráfico, sob o ponto de vista multiobjetivo de minimizar  $f_1$  e  $f_2$ , faz-se as seguintes constatações:

- A e B são melhores que C, pois têm menores valores objetivo, tanto para  $f_1$  como para  $f_2$ , isto é,  $f_1(A) < f_1(C)$  e  $f_2(A) < f_2(C)$ . Semelhantemente,  $f_1(B) < f_1(C)$  e  $f_2(B) < f_2(C)$ . Por causa disso, é dito que A e B dominam C, e C é dominada por A e B; Uma solução  $x$  domina uma outra  $y$ , quando  $x$  é melhor ou igual que  $y$  em todos os objetivos e estritamente melhor em pelo menos um objetivo. Se a relação de dominância não é satisfeita de  $x$  para  $y$  ou vice-versa, então as soluções são não dominadas (RAUPP, 2012).
- No que diz respeito a A e B, não é possível afirmar qual solução é a melhor, obedecendo ambos os objetivos simultaneamente, pois  $f_2(A) < f_2(B)$  mas  $f_1(A) > f_1(B)$ . Por causa disso, diz-se que elas são soluções não-dominadas entre si.

Figura 1 – Conceito de dominância em um POM.



Fonte: A autora

- O conjunto de todas as soluções não dominadas globalmente é denominado Pareto-Ótimo. A imagem de um determinado conjunto Pareto-ótimo, no espaço dos valores dos objetivos, é chamada de fronteira de Pareto (KONAK; COIT; SMITH, 2006 apud RAUPP, 2012, p.59).
- De acordo com a dominância, utiliza-se o conceito de níveis. Faz parte do primeiro nível todas as soluções que não são dominadas por alguma outra solução. As soluções que pertencem ao segundo nível são dominadas apenas por soluções do primeiro nível. E de forma análoga, as soluções do terceiro nível são aquelas dominadas apenas por indivíduos do segundo nível. O raciocínio é equivalente para soluções dos demais níveis. Na Figura 1, os elementos do nível 1 foram identificados pela cor preta, enquanto os do segundo nível com a cor cinza escuro, e os do terceiro nível com a cor cinza claro. Traçando-se um segmento de reta paralela aos eixos  $f_1$  e  $f_2$ , a partir de cada imagem, é facilitado a visualização quanto à relação de dominância, pois serão dominadas as soluções que estiverem localizadas na parte superior e direita, para o exemplo apresentado.

### 3.1.3 AE para Tratamento de POM

Os problemas científicos e de engenharia classificados como multiobjetivo, geralmente são complexos e difíceis de se resolver. Começou-se a dedicar um pouco mais de atenção a essa classe de problemas em meados dos anos oitenta, e desde então, houve um aumento em aproximadamente quarenta vezes no número publicações de abordagens com o uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEM), juntamente com numerosas aplicações em discipli-

nas científicas e de engenharia (VELDHUIZEN; LAMONT, 2000).

Conforme Oliveira e Saramago (2005), os AEs baseiam-se nos conceitos da evolução natural, e a busca fundamenta-se na população de indivíduos, em que cada indivíduo dessa população configura um ponto de busca do conjunto de possíveis soluções de um determinado problema.

De acordo com Dias (2010), alguns dos AEM mais citados na literatura são o MOGA (FONSECA; FLEMING et al., 1993), o NSGA (SRINIVAS; DEB, 1994) e o SPEA (ZITZLER et al., 2001). No MOGA, calcula-se o desempenho de cada indivíduo, tendo como referência a quantidade de indivíduos que o dominam. Já o NSGA considera ainda o conceito de não dominância e *sharing* para avaliar cada indivíduo. No que concerne ao SPEA, os indivíduos são classificados, no intervalo de  $[0,1]$ , de acordo com a quantidade de indivíduos por ele dominado.

Os autores, Coello, Lamont e Veldhuizen (2007) citam a aplicação de AEM em diversas áreas do conhecimento, tais como Engenharia (Meio Ambiente, Elétrica Eletrônica, Telecomunicações, Otimização de Redes, Mecânica, Construção Civil, Transporte, dentre outras), Aplicações Científicas (Geografia, Física, Medicina, Ciência e Engenharia da Computação, e outras), Aplicações Industriais, e assim por diante.

No trabalho de Abbass (2002), por exemplo, foi desenvolvido redes neurais artificiais baseada na DE para predição de câncer de mama, a fim de melhorar o trabalho médico no diagnóstico dessa doença.

Pode-se perceber que em alguns trabalhos realizou-se adaptações na metodologia, adequando-a ao problemas em questão. Também foi observado em Coello, Veldhuizen e Lamont (2002) que o algoritmo evolutivo mais utilizado nas diversas áreas são os AGs e adaptações dos mesmos.

Com base nesses estudos, foi possível constatar que os AEs obtiveram destaques significativos para POMs, sendo aplicáveis para problemas de diversos domínios e que alcançaram resultados satisfatórios para os problemas apresentados.

#### 3.1.4 Evolução Diferencial

A DE é um tipo de algoritmo evolutivo originalmente proposto por Prince e Storn para resolver problemas sobre um domínio contínuo (BABU; ANBARASU, 2005). De acordo com Prado et al. (2010), a DE é primordialmente aplicada na solução de problemas contínuos devido à operação da adição diferencial, que causa perturbações na população trabalhada, que está diretamente ligado ao espaço Euclidiano. De acordo com o autor, a aplicação em problemas discretos não pode ser tida inicialmente como simples.

A literatura apresenta algumas aplicações da DE para problemas discretos, dentre elas em (TASGETIREN; SUGANTHAN; PAN, 2010) e (FIGUEIREDO; SOUZA; ARAÚJO, 2014). Em (TASGETIREN; SUGANTHAN; PAN, 2010) é demonstrado um conjunto de algoritmos discretos da DE com populações paralelas, no qual, a população de ensaio é obtida através de um operador de cruzamento, e a população mutante por meio do procedimento de destruição e construção. Nesse contexto, foi escolhido para aplicação o problema do caixeiro viajante. Em (FIGUEIREDO; SOUZA; ARAÚJO, 2014) é proposto uma adaptação no algoritmo da DE para resolver os problemas das p-medianas em um espaço discreto. Nesse estudo, buscou-se definir a melhor localização para as instalações, sob o intuito de minimizar o somatório das distâncias dos pontos de demanda à instalação mais próxima.

No presente POM, a DE foi adaptada para solucionar um problema discreto em grafos. A DE é um método relativamente novo, mas tem obtido destaque dentre os AEs, inclusive pela capacidade de resolver de forma satisfatória POMs. Das e Suganthan (2011) enumeram motivos pelos quais a DE tem sido atraente para pesquisadores de diversas áreas.

- Em comparação com a maioria dos outros AEs, a DE é muito mais simples e fácil de implementar. Tal simplicidade é positiva para profissionais de outras áreas do conhecimento, já que nem todos detém conhecimento técnico de programação.
- A DE apresenta um desempenho muito melhor em comparação com vários outros como G3 com PCX, MA-S2, ALEP, CPSO-H, conforme estudos recentes (RAHNAMAYAN; TIZHOOSH; SALAMA, 2008)(ZHANG; SANDERSON, 2009), (DAS et al., 2009), além de outros benefícios de desempenho, como rápida convergência, robustez e precisão.
- A DE utiliza uma pequena quantidade de parâmetros;
- E o espaço de complexidade da DE é baixa em comparação com alguns dos otimizadores de parâmetros reais mais competitivos.

A DE é proposta como uma variação dos algoritmos genéticos para alcançar os objetivos de robustez na otimização e rapidez na convergência de um dado problema (REDDY; KUMAR, 2007).

Apesar de ser classificado como um algoritmo evolutivo, diferentemente de outros métodos, a fase de mutação da DE se baseia em nenhum processo natural. Segundo Guimarães (2009) e Robič e Filipič (2005), essa fase é fundamentada em argumentos puramente matemáticos e heurísticas apropriados à otimização, e não em uma metáfora da natureza. Além da mutação, a DE difere-se também de outros algoritmos evolucionários na fase de recombinação (REDDY; KUMAR, 2007).

De acordo com Babu e Anbarasu (2005), a ideia da DE é adaptar a pesquisa durante o processo evolutivo. No começo da evolução, as perturbações são grandes, uma vez que os pais individuais estão longe um do outro. Quando o processo evolucionário amadurece, a população converge para uma pequena região e as perturbações de adaptação tornam-se pequenas. Como resultado, o algoritmo evolutivo realiza uma pesquisa exploratória global durante as fases iniciais do processo evolutivo e exploração local durante a fase de maturidade da pesquisa.

#### 3.1.4.1 Evolução Diferencial para Problemas Multiobjetivo

Uma variação da DE é a DEMO, uma versão para otimização multiobjetivo. Na Figura 2 é apresentado o pseudocódigo da DEMO:

Figura 2 – Algoritmo DEMO para roteamento de transporte público.

1. Avaliar a população inicial  $P$  com  $n$  indivíduos
2. Enquanto não atingir o critério de parada, faça:
  - a) Para cada indivíduo  $P_i (i = 1, \dots, n)$ , repita:
    - i. Criar um candidato  $C_i$  a partir do pai  $P_i$ .
    - ii. Avaliar o candidato.
    - iii. Se o candidato dominar o pai, o candidato substitui o pai.  
Se o pai domina o candidato, o candidato é descartado.  
Caso contrário, o candidato é adicionado à população.
  - b) Ordenar a população pela não dominância.
  - c) Truncar a população para  $n$

Fonte: (ROBIČ; FILIPIČ, 2005, adaptado)

Primeiramente, avalia-se cada indivíduo da população inicial, em relação aos objetivos do problema. Em seguida, percorre-se a população inicial, e cria-se para cada indivíduo uma solução filho e a avalia. Então, compara-se o pai com o filho. Se o filho dominar o pai, então ele o substitui. Caso contrário, é descartado. Se nenhum dominar o outro, então o filho é adicionado à população. Ao final desse processo, ordena-se os indivíduos pela não-dominância e quanto a uma medida de aglomeração.

Os autores Cheng e Zhang (2013) apresentam a aplicação do DEMO em diversas áreas do conhecimento. Algumas destas são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Exemplos de aplicação da DEMO para problemas reais.

<b>Áreas e Detalhes</b>	<b>Tipos de DEMO aplicado e referência correspondente</b>
<b>Indústria e Fabricação</b>	
Design de estruturas de aço	Classificação por não-dominância com AG (NSGA-II) usando operador de DE (KAVEH; LAKNEJADI; ALINEJAD, 2012)
<b>Sistema de energia</b>	
Ambiental / Econômico Operação de hidrelétrica	DE multiobjetivo (WU et al., 2010); Uma adaptação do DE multiobjetivo com rede neural (ZHANG et al., 2013);
<b>Agendamento e planejamento</b>	
Agendamento de diagrama de fluxo	Um algoritmo híbrido baseado em DE (QIAN et al., 2009)
<b>Atribuição e Gestão</b>	
Gestão de recursos hídricos	DE multiobjetivo (QIN et al., 2010)
<b>Reconhecimento de padrões</b>	
Clustering	Uma adaptação multiobjetivo de DE (ZHONG; ZHANG; ZHANG, 2013)
<b>Outros</b>	
Controle Mineração de Dados	Um algoritmo baseado no DE[46] Pareto baseado em DE multiobjetivo (ZHONG; ZHANG; ZHANG, 2013)
Processamento de Sinais	DE generalizado (GDE3)(GOUDOS; SAHALOS, 2010)
Microbiologia preditiva	Um Pareto de DE com pesquisa local (CRUZ-RAMÍREZ et al., 2010)
Redes complexas	Uma modificação para DE binário (LI; SANSAVINI; ZIO, 2013)

(CHENG; ZHANG, 2013, adaptado)

Feito a apresentação dos conceitos e métodos utilizados, o capítulo a seguir discorre de forma detalhada o escopo do problema estudado.

## 4 Descrição do Problema

Neste capítulo, o problema desse estudo é apresentado mais detalhadamente.

### 4.1 Modelo Matemático

Seja  $G(V, A)$  o grafo direcionado que modela uma cidade, em que  $V$  é o conjunto de vértices e  $A$  o conjunto de arestas. O par  $(i, j)$  é a aresta direcionada que liga o vértice  $i$  a  $j$ . Cada vértice representa uma esquina de um cruzamento entre ruas.

As arestas desse grafo são multiponderadas e armazenam a distância entre dois vértices e a quantidade média de pessoas dessa região que são atendidas por essa linha de ônibus.

Uma rota é um caminho do ponto de ônibus inicial ao ponto final, que é representado por vértices específicos. Tal caminho é extraído do grafo direcionado que modela a região em questão.

Uma linha de ônibus descreve um caminho, que atende tanto clientes que residem sobre o caminho da linha ônibus, como aqueles que estão a uma dada distância máxima da rota. Para simplificar, considera-se que os pontos de ônibus encontram-se sobre alguns vértices da rota.

Uma solução é uma rota, em que os pontos inicial e final são fixos e fornecidos ao problema e os intermediários definidos pela heurística proposta.

Para o problema de roteamento de ônibus multiobjetivo em questão, há duas funções objetivo. A primeira consiste em minimizar a distância percorrida, que é dado pelo somatório das distância das arestas do caminho. A segunda é uma medida de atendimento da rota que é calculado da seguinte forma. Para cada vértice da rota, faz-se uma busca em largura e inclui-se como atendidas aquelas arestas que possuem distância menor ou igual a um parâmetro previamente fornecido. De tais arestas atendidas, são acumuladas o número de pessoas que utilizam a linha. O problema está sujeito às seguintes restrições:

- Não deve haver ciclo na rota, pois não é interessante que o ônibus passe mais de uma vez pelo mesmo vértice;
- Pontos de ônibus estarão localizado sobre alguns vértices da rota;
- Pontos consecutivos estão entre uma distância mínima e máxima;

- Os clientes de uma aresta s ão atendidos se estão a uma distância máxima da localização dos pontos de ônibus.

## 4.2 DEMO

O problema tratado nesse trabalho usará uma versão adaptada da DEMO. À seguir, encontra-se de forma detalhada como é executada cada fase do algoritmo:

- **Inicialização:** De acordo com Oliveira e Saramago (2005) os indivíduos da população inicial devem ser definidos de forma aleatória, sendo necessário, entretanto, que boa parte do espaço de busca seja trabalhado. No problema em questão, a população inicial são os diferentes caminhos (rotas) entre o ponto inicial e o final. Existem diversos algoritmos de roteamentos que usam diferentes métricas para definir rotas. Nesse trabalho optou-se por utilizar o algoritmo de busca em profundidade aleatória (BPA) (BRAGA; NUNES, 2014), para que fosse geradas várias rotas distintas para a população inicial.

Em sua forma original, para cada vértice descoberto, o algoritmo de busca em profundidade armazena em uma estrutura de dados o conjunto dos vértices adjacentes (ao vértice em questão) que ainda não tenham sido visitados. Em seguida, visita esse conjunto, sempre aprofundando no grafo, até que encontre o vértice procurado ou que não haja mais vértices a serem visitados. Nesse estudo, após o momento em que se descobre os vértices adjacentes a um determinado vértice, estes são aleatorizados antes de armazenar nessa estrutura de dados, o que faz com que a cada execução, o operador gere diferentes rotas de uma origem até um destino.

- **Mutação:** O processo de mutação consiste em se gerar um corte na rota, em um vértice escolhido aleatoriamente. Executa-se o algoritmo de BPA à partir do vértice ao qual foi realizado o corte, considerando os vértices remanescentes como descobertos. Tal procedimento poderá gerar uma subrota distinta do ponto de corte até o ponto final.

O processo de mutação pode fazer com que a nova rota não obedeça às restrições do problema de distância mínima e máxima entre os pontos de ônibus na posição do corte. Nesse caso, recalcula-se a nova localização desses pontos para que a nova rota possa atender as restrições do problema. Além disso, o processo também pode gerar ciclos que também são removidos.

- **Recombinação ou cruzamento:** O processo de cruzamento consiste em se gerar uma nova solução a partir de cada solução já existente. Nesse trabalho é utilizado duas versões quanto ao operador de cruzamento. Em uma é utilizado duas soluções, e na outra três soluções para se gerar uma nova solução. Abaixo é explicado de forma detalhada o procedimento.

A primeira versão do operador de cruzamento se dá da seguinte maneira. Para cada solução  $S_i$  da população pai, escolhe-se outra,  $S_j$ , aleatoriamente, sendo que  $S_i \neq S_j$ , e realiza-se o processo a seguir, conforme é exemplificado na Figura 5.

1. Primeiramente, verifica-se quais os vértices de comuns entre ambos, e escolhe-se aleatoriamente um desses vértices,  $P_k$ , para o cruzamento.
2. Gera-se uma nova solução (descendente ou filho), e este é formado pela a parte do caminho que vai do ponto inicial até  $P_k$  da solução  $S_i$ , junto à parte que vai de  $P_k$  até o ponto final da solução  $S_j$ .

Para o segundo operador esse processo é repetido com a solução resultante do item anterior e uma nova solução  $S_k$  escolhida aleatoriamente do conjunto pai de soluções.

Tanto as novas soluções resultantes do primeiro operador de cruzamento, quanto do segundo, devem obedecer às restrições preestabelecidas.

A seguir encontram-se os pseudocódigos das duas versões do operador de cruzamento, nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Pseudocódigo para o cruzamento usando duas soluções.

1. Para cada solução  $S_i (i = 1, \dots, N)$ , em que  $N$  é o tamanho da população, repita:
  - a) Para cada pai  $S_i$ , sortear uma solução aleatória,  $S_j$ , em que  $i \neq j$ .
  - b) Verificar todos os vértices comuns (exceto o primeiro e o último);
  - c) Sortear um dos vértices comuns,  $P_k$ .
  - d) Gerar uma nova solução, que contenha os elementos da  $S_i$  do vértice inicial até  $P_k$ , e os vértices de  $S_j$ , de  $P_{k+1}$  até o vértice final.
  - e) Analisar a nova rota de acordo com as restrições do problema. Para garantir a factibilidade caso a nova solução restrinja alguma restrição, remove-se os ciclos, caso haja, e determina-se localização dos pontos de ônibus, de acordo com o intervalo de distância definido.

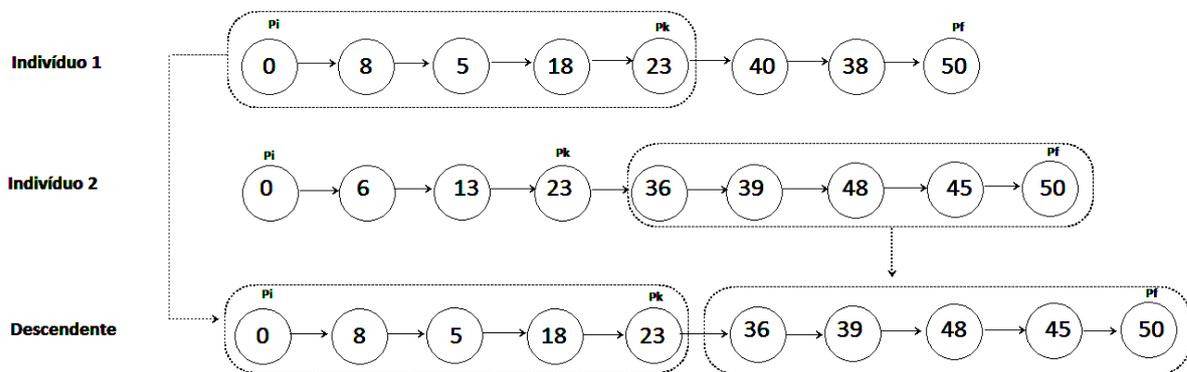
Fonte: A autora

Figura 4 – Pseudocódigo para o cruzamento usando três soluções.

1. Para cada solução  $S_i (i = 1, \dots, N)$  repita:
  - a) Para cada pai  $S_i$ , sortear uma solução aleatória e realizar o cruzamento com duas soluções, conforme algoritmo da Figura 3;
  - b) Realizar um novo cruzamento a partir da solução resultante do item anterior com uma outra solução escolhida aleatoriamente.

Fonte: A autora

Figura 5 – Cruzamento com duas soluções.



Fonte: A autora

Os procedimentos descritos são exemplificados na Figura 5. O indivíduo 1 representa a solução  $S_i$ , o indivíduo 2 apresenta  $S_j$ , o vértice 23 é o único comum às duas rotas (excetuando os vértices inicial e final), e nesse caso é o  $P_k$ . O descendente é a junção das partes evidenciadas pelo esquema gráfico.

- **Seleção:** Após o processo de avaliação é feita uma seleção. Essa fase consiste em escolher o conjunto de melhores soluções para a próxima geração. É feita uma comparação entre os respectivos pai e o filho. Seleciona-se para a próxima geração as melhores soluções, sob o ponto de vista multiobjetivo, ou seja, as soluções não dominadas. Uma lista de soluções é preenchida para cada comparação. Se uma solução domina a outra, essa vai para a lista. Se ambas forem não dominadas, as duas são acrescentadas. Finalmente, ordena-se a lista quanto a não dominância. Por tais critérios, vão para a próxima geração os  $N$  melhores elementos da lista ordenada.

A Figura 6 apresenta um esquema visual das fases da DEMO. Todo o processo realizado abordado anteriormente, desde a inicialização até a fase de seleção, pode ser observado por meio da mesma.

A seção a seguir exemplifica cada uma das fases da DEMO por meio de um exemplo. Por meio da Seção 4.3 é possível visualizar as diferenças entre os cruzamentos com duas e com três soluções.

### 4.3 Exemplo de Aplicação

O grafo direcionado, apresentado na Figura 7, representa uma região fictícia a ser atendida por uma determinada linha. Nesse contexto, cada vértice do grafo representa a interseção entre duas ruas, e essas, por sua vez, são representadas pelas arestas.

A aresta  $(i, j)$  é aquela que vai do vértice  $i$  ao vértice  $j$ , sendo que a distância entre  $i$  e  $j$  é de  $a_{i,j}$  metros,  $\text{Distancia}(i, j) = a_{i,j}$ , e são atendidas um total de  $b_{i,j}$  pessoas por essa

Figura 6 – Fases da DEMO aplicada ao roteamento de veículos.

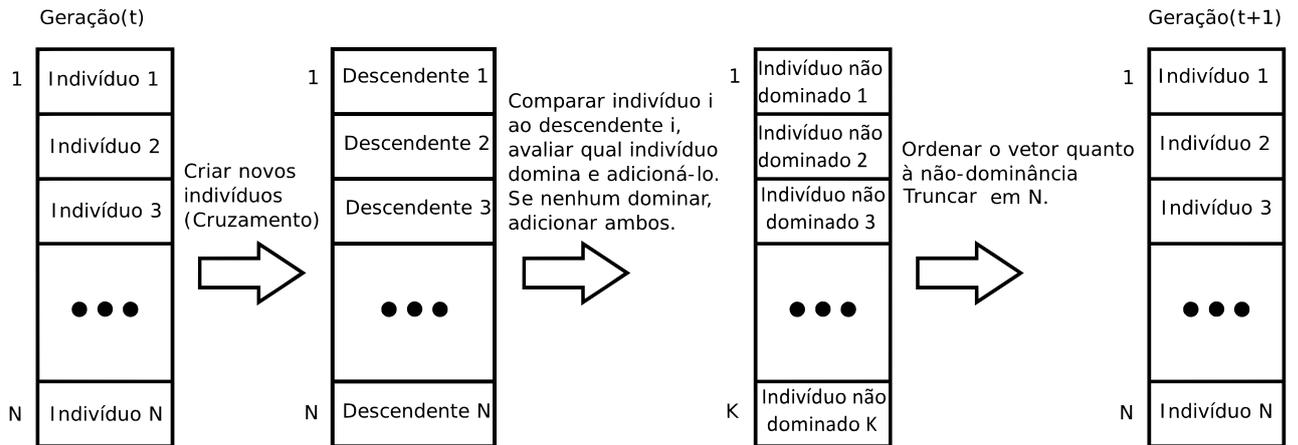
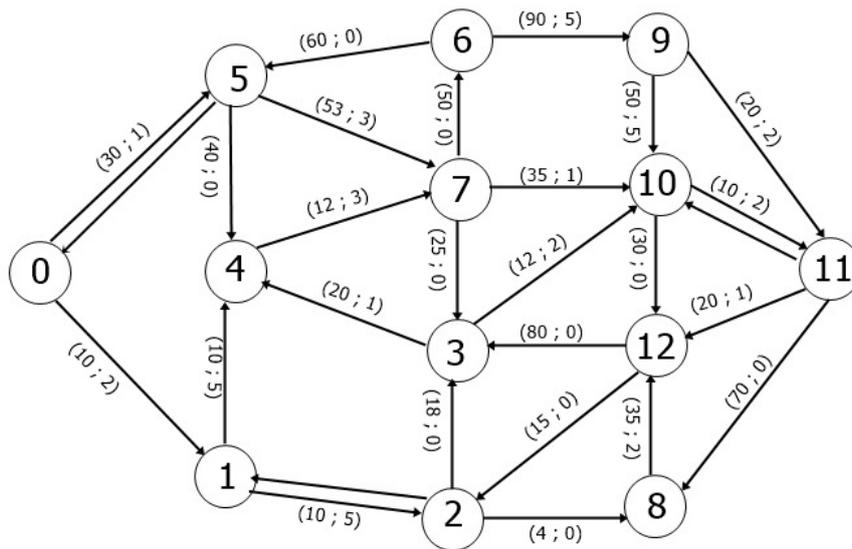


Figura 7 – Grafo de uma região fictícia.



aresta,  $\text{Demanda}(i, j) = b_{i,j}$ .

Os pesos das arestas indicado na Figura 7 representam a distância entre os vértices e a quantidade de pessoas atendidas por cada aresta, respectivamente. Tais pesos são apresentados na Tabela 2.

Nesse exemplo, serão usados os seguintes parâmetros:

- O ponto inicial é o vértice 0 e o ponto final é o vértice 12;

Tabela 2 – Arestas do grafo da região fictícia da Figura 7 e seus respectivos pesos (distância e demanda).

Aresta $e(i, j)$	Distância $(i, j)$	Demanda $e(i, j)$
(0,1)	10	2
(0,5)	30	1
(1,2)	10	5
(1,4)	10	5
(2,1)	10	5
(2,3)	18	0
(2,8)	4	0
(3,4)	20	1
(3,10)	12	2
(4,7)	12	3
(5,0)	30	1
(5,4)	40	0
(5,7)	53	3
(6,5)	60	0
(6,9)	90	5
(7,3)	25	0
(7,6)	50	0
(7,10)	35	1
(8,12)	35	2
(9,10)	50	5
(9,11)	20	2
(10,11)	10	2
(10,12)	30	0
(11,8)	70	0
(11,10)	10	2
(11,12)	20	1
(12,3)	80	0
(12,2)	15	0

Fonte: A Autora

- Uma aresta é atendida se está a no máximo 20m do ponto de ônibus da rota;
- A distância mínima entre os pontos de ônibus é de 30m e a distância máxima é 100m;
- A população inicial de soluções terá apenas 4 indivíduos, pois o grafo em questão é bem pequeno, e um número menor de dados facilita o acompanhamento por parte do leitor;
- A taxa de mutação é de 25%.

Para esse exemplo foi fornecido à aplicação um arquivo de texto de um grafo direcionado. À partir desse, o programa constrói a matriz de adjacência e segue com os procedimentos necessários. Os valores referentes à distância também são fornecidos pelo arquivo de texto, e a demanda atendida foi gerada de forma automática pela aplicação, de forma aleatória para um intervalo de 0 à 5 pessoas e esses dados foram armazenados em uma matriz deno-

minada matriz de atendimento.

Para o exemplo em questão, em relação aos pesos de distância e demanda,  $a$  e  $b$ , respectivamente, considerou-se que a Distância  $(i, j) = \text{Distância}(j, i) = a$ , e a Demanda  $(i, j) = \text{Demanda}(j, i) = b$ . Essa informação é importante em especial para o cálculo da demanda total atendida por cada rota e é apresentada na Tabela 2 apenas em relação aos sentidos indicados pelo direcionamento do grafo, mas os pesos valem para ambos os sentidos.

#### 4.3.1 Exemplo com Cruzamento de Duas Soluções

Para os parâmetros informados, o programa gerou inicialmente as seguintes rotas apresentadas na Tabela 3:

Tabela 3 – Rotas geradas na inicialização pelo BFA.

Rota	Caminhos pai	Distância	Demanda	Pontos de ônibus
1	0, 5, 7, 3, 10, 12	150,0	25	0, 7 e 12
2	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11, 8 e 12
3	0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12	99,0	23	0 e 12
4	0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27	0, 7 e 12

O peso referente à distância é dado pelo somatório da distância entre todos os vértices pertencente à rota. Para a rota 1, têm-se Distância  $(0, 5) = 30$ , Distância  $(5, 7) = 53$ , Distância  $(7, 3) = 25$ , Distância  $(3, 10) = 12$ , Distância  $(10, 12) = 30$ , que resulta numa distância total de 150m.

O cálculo da demanda da rota 1 foi realizado da seguinte maneira. Primeiramente soma-se o número de pessoas que encontra-se à margem da rota, ou seja, nas arestas que pertencem à rota. Demanda $(0, 5) = 1$ , Demanda $(5, 7) = 3$ , Demanda  $(7, 3) = 0$ , Demanda  $(3, 10) = 2$ , Demanda $(10, 12) = 0$ . Que totaliza 6 pessoas. Após isso, faz-se a Busca em Largura para os vértices adjacentes aos vértices da rota. Respeitando-se a distância máxima de atendimento definida (20m). A partir do vértice 0 pode-se atender as arestas Demanda  $(0, 1) = 2$ , Demanda  $(1, 2) = 5$ , Demanda  $(1, 4) = 5$ . Além das arestas que já estão na rota, não há outras atendidas pelo vértice 5. Por meio do vértice 7, atende-se a aresta Demanda  $(4, 7) = 3$ , e pelo vértice 3 atende-se as arestas Demanda  $(3, 4) = 1$  e Demanda  $(2, 3) = 0$ . A partir do vértice 10, também atende-se a aresta Demanda  $(10, 11) = 2$ , e por meio do 12 atende-se as arestas Demanda  $(11, 12) = 1$ , Demanda  $(12, 2) = 0$ , e a também a aresta Demanda  $(2, 8) = 0$ , partindo de 12 e passando por 2. Nesse caso, 19 pessoas são atendidas nas arestas adjacentes à rota. E por isso, essa rota atende uma demanda total de 25 pessoas. O raciocínio é análogo para o cálculo da demanda das demais rotas.

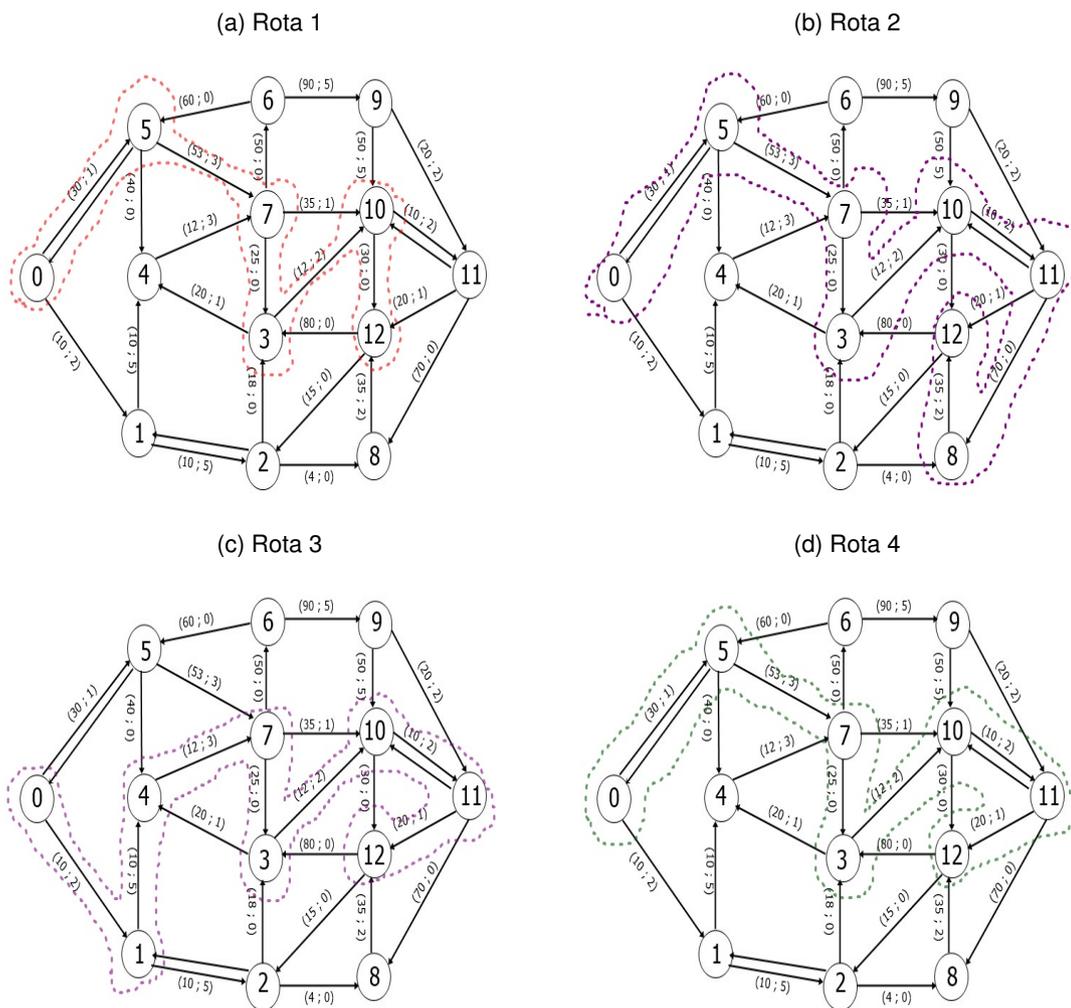
A localização dos pontos de ônibus levou em consideração que sempre haverá ponto

de ônibus no vértice inicial e final, e os intermediários devem respeitar a distância mínima a máxima definida, sendo que coloca-se a menor quantidade de pontos possíveis que obedeça as restrições do problema.

Esse procedimento foi feito da seguinte forma. Primeiramente coloca-se um ponto de ônibus no vértice inicial e no final, e “caminha-se” na rota do sentido do ponto de ônibus inicial ao final. Partindo de cada ponto, acumula-se a distância entre os vértices da rota até que o somatório dos valores acumulados somado à distância do vértice atual ao próximo, ultrapasse a distância máxima. Se isso acontecer, acrescenta-se um novo ponto de ônibus no vértice atual. Todavia, também é levado em consideração o somatório da distância do ponto de ônibus atual ao ponto final, a são acrescentado os pontos de ônibus quando necessário, para garantir que a localização dos pontos não viole tais restrições.

O caminho de cada rota encontra-se representado na Figura 8.

Figura 8 – Rotas geradas pelo processo de inicialização.



Fonte: A autora

Para rota criada avalia-se a factibilidade da mesma. Caso essa não atenda todas as restrições do problema, se houver possibilidade, faz-se as adequações para torná-la factível. Após o processo de inicialização, entra-se no processo iterativo e assim ocorre o cruzamento, seleção e a ordenação.

Conforme explicado na Seção 4.2 por meio da Figura 5, há duas versões da DEMO, cada uma com um operador distinto de cruzamento que se diferencia pelo número de pais. Em um utiliza-se duas soluções, e no outro, três soluções. O intuito de se utilizar mais de uma versão para cruzamento é para definir se uma versão produz melhores soluções que a outra.

A seguir exemplifica-se o processo de cruzamento com duas soluções:

#### **Cruzamento para a Rota 1:**

Rota 1: [0, 5, 7, 3, 10, 12]

Rota escolhida aleatoriamente de índice  $j = 3$ : [0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12]

Vértices comuns: 7, 3 e 10

Vértice sorteado para o cruzamento ( $P_k$ ): 7

Rota gerada: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

#### **Cruzamento para a Rota 2:**

Rota 2: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Rota escolhida aleatoriamente de índice  $j = 4$ : [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

Vértices comuns: 5,7,3,10,11

Vértice sorteado para o cruzamento ( $P_k$ ): 11

Rota gerada: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

#### **Cruzamento para a Rota 3:**

Rota 3: [0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12]

Rota escolhida aleatoriamente de índice  $j = 2$ : [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Vértices comuns: 7, 3, 10, 11

Vértice sorteado para o cruzamento ( $P_k$ ): 3

Rota gerada: [0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

#### **Cruzamento para a Rota 4:**

Rota 4: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

Rota escolhida aleatoriamente de índice  $j = 2$ : [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Vértices comuns: 5, 7, 3, 10, 11

Vértice sorteado para o cruzamento ( $P_k$ ): 10

Rota gerada: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Ao fim do cruzamento, além da população de pais, há também a população de filhos, conforme é mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 – População de rotas filhas.

Rota	Caminhos filhos	Distância	Demanda	Pontos de ônibus
1	0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27	0, 7 e 12
2	0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27	0, 7 12
3	0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12	184,0	25	0,11, 8 e 12
4	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11,8 e 12

Existe 25% de chance de ocorrer mutação. A decisão se vai ocorrer ou não a mutação dependerá do seguinte resultado. É gerado um número aleatório entre 0 e 1. Se esse número for menor ou igual que 0,25, ocorre a mutação, caso contrário, não ocorre.

No caso de ocorrer a mutação, é sorteado um vértice para o corte, e é gerado uma nova rota a partir do ponto de corte por meio do BPA da seguinte forma. Corta-se a rota no vértice sorteado, e gera-se uma nova rota a partir desse vértice. Em seguida, concatena-se o primeiro conjunto de vértices, que vai do ponto inicial ao ponto de corte com o segundo conjunto, que vai do ponto de corte ao vértice final, gerando assim uma nova solução.

Dentre a população de rotas filhas, ocorreu mutação na Rota 1, conforme é mostrado abaixo.

Rota original: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

Vértice escolhido para corte: 3

Nova rota: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

A nova rota substitui a antiga na população de rotas filhas.

Tabela 5 – Exemplo de rota que sofreu mutação.

Rota Original	Rota após mutação	Distância	Demanda	Pontos de ônibus
0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11, 8, 12

Observação: Os dados referente a distância percorrida e demanda atendida da Tabela 5 referem-se à rota que sofreu mutação.

A Tabela 7 mostra a população de rotas filhas após o processo de mutação.

No processo de seleção compara-se os valores de objetivos para cada pai e respectivo filho sob a ótica multiobjetivo, sendo que para a próxima geração sempre vai os elementos de

Tabela 6 – População de rotas filhas após processo de mutação.

Rota	Caminhos filhos	Distância	Demanda	Pontos de ônibus
1	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11, 8 e 12
2	0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27	0, 7 12
3	0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12	184,0	25	0,11, 8 e 12
4	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11,8 e 12

melhores desempenho. Em suma, compara-se pai e filho a fim de se verificar se há dominância entre um e outro. Se houver vai para a próxima etapa (ordenação pela não dominância), o indivíduo que dominar. Caso não haja dominância entre um e outro, ambos vão para a próxima etapa.

Por exemplo, seja os pesos da Rota 1 pai, [0, 5, 7, 3, 10, 12], distância percorrida: 150m e demanda atendida: 25 pessoas, e da Rota 1 filha, [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12], distância percorrida: 235,0m e demanda atendida: 29 pessoas. Sabendo-se que o objetivo é de minimizar a distância percorrida, e maximizar a demanda atendida (minimizar -demanda), compara-se tais pesos entre ambas as soluções, para verificar se alguma é melhor em relação a ambos os objetivos (ou melhor em um e igual em relação a outro objetivo).

Para que haja dominância, em um contexto de minimização, é necessário que a solução seja menor ou igual que a outra em todos os objetivos e estritamente menor em pelo menos um deles. Para este caso pergunta-se se o negativo da demanda da rota pai é menor ou igual que a demanda da rota filha e a distância percorrida da rota pai é menor ou igual que a distância percorrida da rota filho, e em pelo menos um desses objetivos o pai é estritamente menor? Se a resposta for positiva para ambas as perguntas, então o pai domina o filho, e é selecionado para a próxima fase. O raciocínio é análogo para comparar a solução filho, com a solução pai. Se não houver dominância, ambas soluções vão para a próxima fase.

Para o exemplo em questão, a solução pai é melhor que a rota filho em relação a distância percorrida, visto que percorre uma distância menor, mas é pior que a filha em relação à demanda, pois a solução filha atende uma demanda maior. Por isso, ambas as soluções vão para a etapa de ordenação, visto que são não dominadas entre elas.

Comparando-se par a par as rotas da população pai e de filhos, conforme Tabela 7, tem-se o resultado do processo de seleção, que é mostrado na Tabela 8.

Tabela 7 – População de rotas pais e filhas.

Rota pai	Dist. pai	Dem. pai	Rota filha	Dist. filha	Dem. filha
0, 5, 7, 3, 10, 12	150,0	25	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29
0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27
0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12	99,0	23	0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12	184,0	25
0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29

Tabela 8 – Resultado do processo de seleção.

Rota	Distância	Demanda
0, 5, 7, 3, 10, 12	150,0	25
0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29
0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29
0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27
0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12	99,0	23
0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12	184,0	25
0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	150,0	27
0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29

E finalmente, após a seleção, ocorre-se a ordenação, de acordo com os valores objetivos de cada rota. O tamanho da população é truncado ao valor inicial.

Para realizar a ordenação pela não dominância, realiza-se a mesma comparação que no processo de seleção, com uma ressalva. No processo de seleção, compara-se o filho com o pai que o gerou, e no processo de ordenação, compara-se cada solução a todas as demais, e atribui-se o nível de fronteira de Pareto correspondente para cada solução. O procedimento se dá da seguinte maneira. Se a solução for dominada por nenhuma outra solução, então ela pertence ao grupo 1. Se ela for dominada apenas por indivíduos do grupo 1, então ela é do grupo 2, e assim sucessivamente. Para o exemplo dado, as duas primeiras rotas da população final, são não dominadas, constituindo, portanto, o conjunto não dominado para essa iteração.

A Tabela 9 mostra o resultado do processo de ordenação, com o respectivo grupo da solução. Pode-se perceber que as três primeiras soluções são não dominadas entre si, e que a quarta solução é dominada pela segunda solução.

Tabela 9 – Resultado do processo de ordenação pela não dominância.

Rota	Demanda	Distância	Nível
0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]	29	235,0	1
0, 5, 7, 3, 10, 11, 12	27	150,0	1
0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12	23	99,0	1
0, 5, 7, 3, 10, 12	25	150,0	2

Os processos de cruzamento, mutação, seleção e ordenação são realizados sucessivas vezes, no intuito de que convirja para maior diversidade na população e obter os melhores elementos da mesma.

#### 4.3.2 Exemplo com Cruzamento de Três Soluções

Nessa subseção, será mostrado um exemplo do cruzamento utilizando-se três soluções, para uma determinada população inicial gerada pelo BPA respeitando as restrições pré-

estabelecidas.

Seja a população inicial, conforme Tabela 10

Tabela 10 – Rotas geradas na inicialização pelo BPA.

Rota	Rota gerada	Distância	Demanda	Pontos de ônibus
1	0, 5, 7, 3, 10, 12	150,0	25	0, 7 e 12
2	0, 5, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12	234,0	26	0, 7, 11, 8 e 12
3	0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12	99,0	23	0 e 12
4	0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12	235,0	29	0, 7, 11, 8 e 12

A seguir é mostrado como se dá a geração da solução filho 4, gerada a partir da solução pai 4.

#### Primeiro cruzamento

Rota 4: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Rota escolhida aleatoriamente: [0, 1, 4, 7, 3, 10, 11, 12] (Rota 3)

Vértices comuns: 7, 3, 10, 11

Vértice escolhido para cruzamento: 3

Rota resultante do primeiro cruzamento: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

#### Segundo Cruzamento

Rota resultante do primeiro cruzamento: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 12]

Rota escolhida aleatoriamente: [0, 5, 4, 7, 3, 10, 11, 8, 12] (Rota 2)

Vértices comuns: 5, 7, 3, 10 e 11

Vértice escolhido para cruzamento: 7

Resultado segundo cruzamento: [0, 5, 7, 3, 10, 11, 8, 12]

Tanto no cruzamento com duas soluções, como no de três soluções, são feitas sucessivas tentativas para cada cruzamento. Se esgotarem todas essas tentativas e o cruzamento não tiver sido realizado, é porque, provavelmente, não é possível de se fazer o cruzamento daquela solução com as demais soluções pertencentes àquela população, pois grande parte ou todos os demais indivíduos da população tem nenhum vértice comum com a dada solução. Nesses casos, a solução filha iguala-se à população pai.

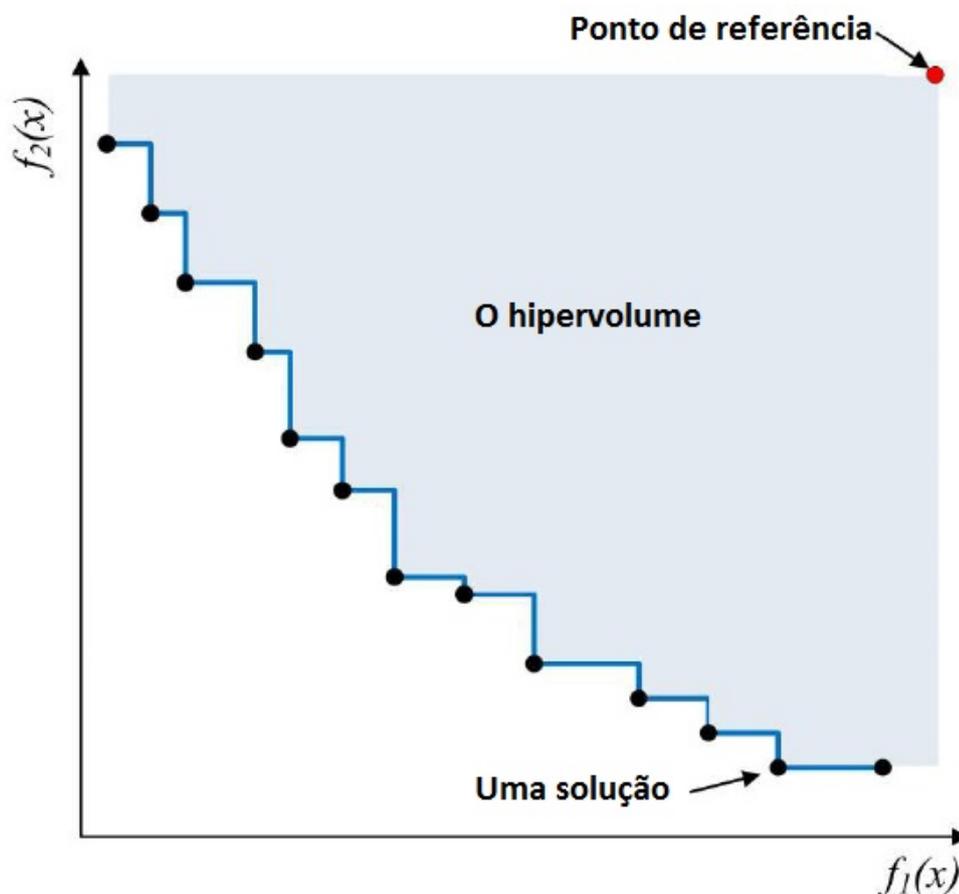
## 4.4 Hipervolume

Após a geração de todas as soluções não dominadas pela DEMO para as versões com cruzamento entre duas e três soluções, para uma determinada quantidade de execuções, cada uma das quais com os mesmos parâmetros de entrada, os dados resultantes podem ser analisados utilizando-se indicadores de qualidade para medir o desempenho dos conjuntos não dominados gerados. Para problemas com poucas dimensões pode-se utilizar o indicador

de hipervolume, o que nesse contexto torna-se viável.

O indicador de hipervolume, proposto por Zitzler e Thiele (1998), consiste em uma métrica que calcula o hipervolume entre um ponto de referência e a imagem do conjunto não dominado. O ponto de referência deve ser necessariamente dominado por todos os elementos do conjunto não dominado final, podendo ser um ponto no espaço dominado pelas fronteiras não dominadas a serem comparadas. O hipervolume é calculado por meio da união de todos os hipercubos encontrados, sendo que, quanto maior for o valor do hipervolume, melhor é o conjunto não dominado, já que isso indica que houve um alto espalhamento entre as soluções no espaço de objetivos (CORDEIRO, 2008). Também pode-se utilizar um conjunto de referências gerado a partir das soluções não dominadas obtidas para ambos os algoritmos estudados (GOLDBARG et al., 2009).

Figura 9 – Representação gráfica do hipervolume em duas dimensões.



Fonte: Wright et al. (2014)

A área entre o ponto de referência e o conjunto não dominado da Figura 9 representa graficamente a região considerada para o cálculo do hipervolume, para um problema que minimiza  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ .

Para o cálculo do hypervolume( $P, r$ ), tem-se que  $P$  é a matriz de objetivos, com dimensões  $n \cdot d$ , em que  $n$  é número de pontos e  $d$  a dimensão do espaço de objetivos) de uma execução e  $r(1 \cdot d)$  é o ponto de referência comum à todas as  $K$  execuções da heurística. Findado o experimento computacional, obtém-se uma amostra  $K$  hipervolumes para cada algoritmo. A matriz final de hipervolumes é organizada conforme apresentado na Tabela 11. Nesse caso,  $h_{i,j}$  é o valor de hipervolume do algoritmo  $i$  na  $j$ -ésima execução.

Tabela 11 – Organização da matriz de hipervolumes.

Algoritmo 1	Algoritmo 2
$h_{1,1}$	$h_{2,1}$
$h_{1,2}$	$h_{2,2}$
$h_{1,3}$	$h_{2,3}$
$\vdots$	$\vdots$
$h_{1,K}$	$h_{2,K}$

Dessa forma, para cada uma das execuções de cada um dos algoritmos com diferentes versões quanto ao cruzamento, calcula-se o respectivo hipervolume e armazena-o na matriz de hipervolumes, que é usada no teste de Wilcoxon-Mann-Whitney para avaliar se as versões quanto ao cruzamento equivalem-se quanto a qualidade das soluções geradas.

## 4.5 Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney

Após calcular o hipervolume de todas as amostras geradas para cada uma das 30 execuções para cada um dos algoritmos, é possível compará-los para identificar se o desempenho de um é melhor que o do outro ou se são equivalentes. Uma forma de se fazer isso é utilizar o teste de Wilcoxon-Mann-Whitney . Por meio deste teste é possível analisar se para duas amostras de hipervolumes distintas (nesse contexto cada amostra é representada por uma coluna da Tabela 2) possuem a mesma mediana. (HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2013)

Esse teste é utilizado quando as amostras não são pareadas, isto é, para populações em que existe o conceito de independência amostral (as amostras de um algoritmo não são obtidas por meio do outro). Para o estudo em questão, as amostras são obtidas por meio de execuções independentes de cada algoritmo (ZANI, 2009).

O par de amostras é comparado aqui com o teste de Wilcoxon-Mann-Whitney em um nível de significância de  $\alpha = 0,05$  (ou seja, 95% de confiança). Se o teste retornar um valor valor-p menor que  $\alpha$ , então considera-se que foi observada uma diferença significativa em relação a mediana. Caso contrário, os algoritmos possuem um comportamento parecido para o conjunto de parâmetros experimentados.

Seguindo todo o procedimento apresentado, desde a geração das populações pela

DEMO, até o teste de Mann-Whitney, é possível descobrir se os Algoritmos 1 e 2 são ou não equivalentes.

# 5 Resultados e Discussões

## 5.1 Ambiente de Teste

A aplicação principal, que utiliza a DEMO, foi implementada na linguagem de programação Java, JRE 1.8.0., utilizando-se a plataforma Eclipse V.4.6.2. O programa recebe os parâmetros de entrada e produz como saída as soluções finais não dominadas de cada execução, em que são exibidas as rotas, a localização dos pontos de ônibus, a demanda total atendida e a distância total percorrida.

Para cada versão de cruzamento (com duas e três soluções) foram realizadas 30 execuções. Em cada execução foi gerado dois arquivos de texto, um com os valores dos objetivos de todas as soluções não dominadas e o outro com as respectivas rotas. O primeiro arquivo está no formato de uma matriz com duas colunas, sendo que a primeira contém a informação de distância e a segunda da demanda. E o segundo contém o conjunto de vértices que formam cada rota.

Para realizar os testes, utilizou-se o grafo que mapeia a região de uma cidade fictícia que possui 1000 vértices e 16866 arestas disponível em (SEDGEWICK, 2016).

Esse grafo possui originalmente o peso referente à distância em quilometragem, nessa aplicação esse dado foi convertido para metros. Como o arquivo com as informações do grafo não possui o peso referente a quantidades de pessoas que usam o serviço de transporte de ônibus por cada aresta, a aplicação gerou um número aleatório entre 0 e 5 para definir tal dado.

Foram utilizados os seguintes parâmetros:

- O vértice inicial é o 20 e o final é o 600;
- A distância mínima entre os pontos de ônibus é de 100m e a distância máxima é de 600m;
- Uma aresta é atendida se estiver a até 20m da rota;
- O percentual de mutação é de 25%;
- A população inicial contém 20 indivíduos;
- Foram executadas 1000 gerações.

Ao final, essa aplicação gerou 30 arquivos com os valores de objetivos referentes às execuções em que foram realizados cruzamentos de duas soluções, outros 30, que dizem res-

peito às execuções em que o processo de cruzamento utilizou três soluções, um arquivo de texto que contém o maior valor para distância e demanda, considerando-se todos os arquivos gerados, além das rotas geradas para cada execução.

Como pode ser observado, nenhum vértice se repete, o que mostra que a rota não possui ciclos. A distância entre os vértices dessa rota é apresentado na Tabela 12. Os valores apresentados pela Tabela 13 mostram que as distâncias entre os pontos respeitam o limite mínimo e máximo definidos no escopo do problema.

Tabela 12 – Distância entre os vértices de uma rota não dominada gerada pelo Algoritmo 1.

Vértice $i$	Vértice $j$	Distância entre $i$ e $j$
20	588	29,97
588	489	60,56
489	565	23,45
565	902	68,98
902	626	21,76
626	384	24,16
384	683	46,63
683	563	73,73
563	95	55,78
95	380	14,43
380	545	57,35
545	521	73,74
521	599	74,33
599	146	59,58
146	612	44,82
612	63	50,62
63	412	68,31
412	825	72,32
825	3	18,60
3	707	30,93
707	268	71,14
268	761	24,00
761	271	59,04
271	740	71,59
740	898	50,46
898	786	54,83
786	724	38,59
724	600	45,29

Um exemplo de solução pertencente ao conjunto de todas soluções não dominadas geradas na primeira execução do Algoritmo 1 é apresentada a seguir.

Distância: 1384,98m

Demanda: 180 pessoas.

Tabela 13 – Distância entre os pontos de ônibus de uma rota não dominada gerada pelo Algoritmo 1.

Ponto de ônibus $i$	Ponto de ônibus $j$	Distância entre $i$ e $j$
20	521	550,54
521	825	369,98
825	600	464,47

Rota: [20, 588, 489, 565, 902, 626, 384, 683, 563, 95, 380, 545, 521, 599, 146, 612, 63, 412, 825, 3, 707, 268, 761, 271, 740, 898, 786, 724, 600]

Localização dos pontos de ônibus: 20, 521, 825, 600

As Tabelas 14 e 15 mostram os valores de objetivos gerado para a primeira execução de cada versão do algoritmo de cruzamento. Para a primeira execução do Algoritmo 1, o menor valor de distância foi 1385m e o menor valor para demanda foi 180 pessoas. O maior valor de distância foi 26425m e o maior valor de demanda foi 2378 pessoas. A mediana quanto a distância foi de 8933m e de demanda foi 1018 pessoas.

Para a primeira execução do Algoritmo 2, o menor valor de distância foi 1152m e o menor valor de demanda foi 133 pessoas. O maior valor de distância foi 23534m e o maior valor de demanda foi 2136 pessoas. A mediana quanto à distância foi 6333m e em relação a demanda foi 684,5 pessoas.

Cada execução de ambos os algoritmos durou aproximadamente 17 minutos e foi gerado um total de 60 arquivos com os valores de objetivos e outros 60 com as informações das rotas.

A Figura 10 exibe a representação gráfica das soluções não dominadas obtidas na primeira execução dos Algoritmos 1 e 2. O eixo das abscissas, representa a distância percorrida, e apresenta o sentido de crescimento padrão, da esquerda para direita. O eixo das ordenadas, apresenta o crescimento em sentido inverso ao padrão, e nesse contexto, representa a demanda atendida, sob a perspectiva de minimizar  $-Demanda$ , que equivale a maximizar a  $Demanda$ .

Pode-se perceber que, para essas execuções, ambos os algoritmos apresentaram comportamento semelhantes e aproximaram-se de uma função linear, sem ser observado dominância significativa de um algoritmo em relação ao outro, o que evidencia que as versões não possuem diferença expressiva. Todavia, análises dos valores de objetivos encontrados em todas as execuções fazem-se necessárias para confirmar ou não essa hipótese.

Para isso, os 30 arquivos gerados, que contêm as informações de demanda e distân-

Tabela 14 – Matriz de objetivos gerada pelo Algoritmo 1.

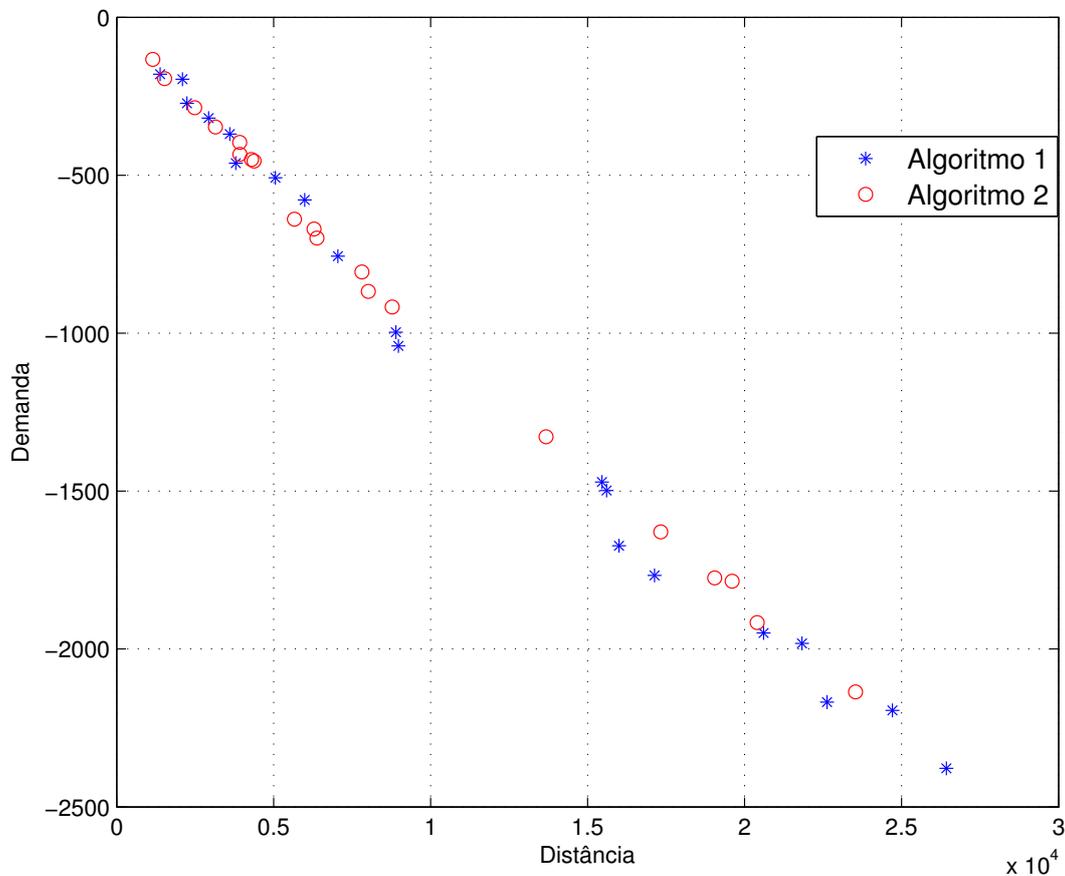
Distância	Demanda
8973,56	1040,00
3606,13	370,00
2237,45	272,00
5990,32	578,00
8891,94	997,00
5058,29	508,00
15456,17	1471,00
20605,00	1949,00
24709,49	2194,00
7048,86	756,00
3796,95	462,00
2929,08	319,00
1384,99	180,00
22623,26	2168,00
2100,54	196,00
16002,61	1673,00
17131,09	1767,00
26424,60	2378,00
15606,77	1498,00
21828,46	1982,00

Tabela 15 – Matriz de objetivos gerada pelo Algoritmo 2.

Distância	Demanda 2
8019,45	868,00
19048,00	1775,00
4379,83	455,00
3149,18	347,00
6288,42	670,00
7813,32	806,00
19602,93	1785,00
3923,46	396,00
1151,54	133,00
8776,34	917,00
17327,24	1629,00
2484,50	286,00
1531,48	194,00
23534,49	2136,00
13679,54	1328,00
5664,56	639,00
20403,6	1916,00
6377,96	699,00
4299,46	450,00
3926,06	434,00

cia, foram utilizados por uma aplicação em Matlab, que calcula o hipervolume para os dados de

Figura 10 – Representação gráfica das soluções produzidas pelos Algoritmos 1 e 2.



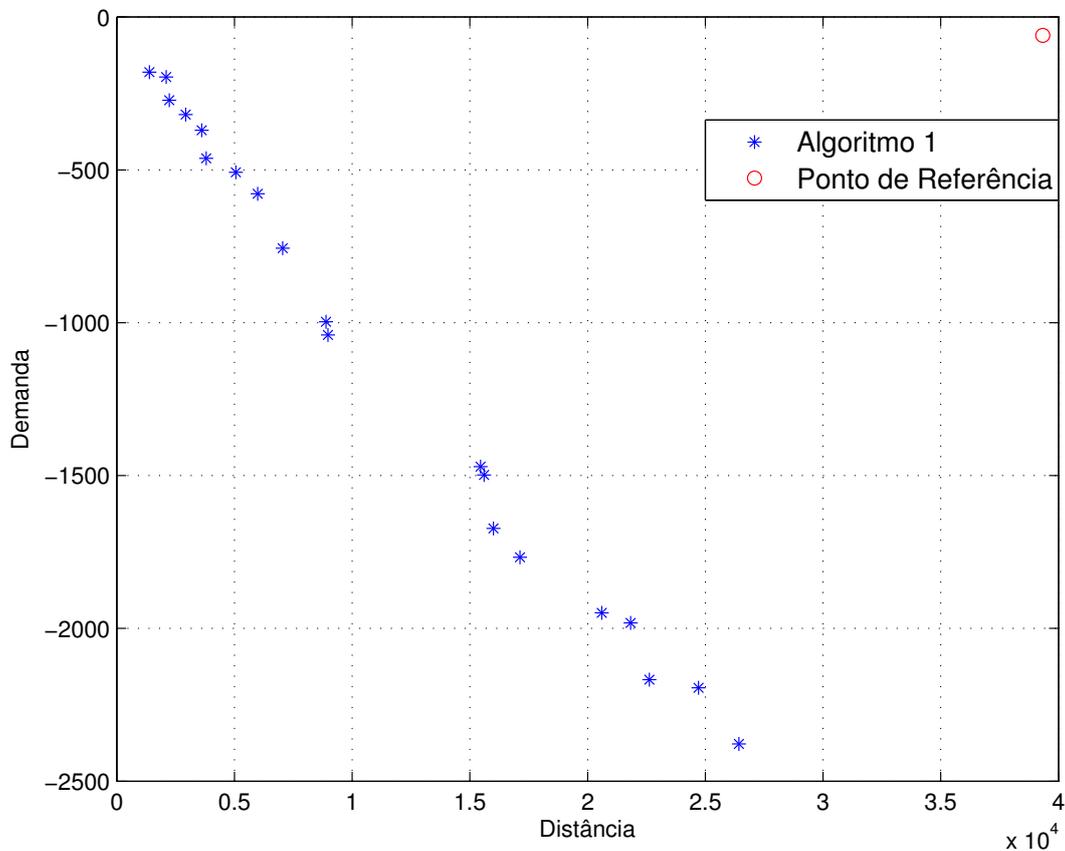
Fonte: A Autora

cada arquivo, usando o mesmo ponto de referência, formado pelos maiores valores de distância e negativo de demanda das soluções não dominadas retornadas, extraídos das fronteiras não dominadas de todas as execuções. Nesse caso, o ponto de referência,  $P$ , é formado pela distância igual a 39332,42m e demanda igual a -60 pessoas, ou seja,  $P = (39332,42; -60)$ . Nesse contexto, o valor para demanda é originalmente negativo. Para torná-lo positivo somou-se o vetor  $v = [100, 100]$  ao ponto de referência para assim realizar o cálculo do hipervolume.

A Figura 11 apresenta graficamente o conjunto de soluções não dominadas referente à primeira execução do Algoritmo 1 e o ponto de referência.

A aplicação em Matlab gerou um arquivo que contém na primeira coluna os hipervolumes em relação ao cruzamento com duas soluções, e a segunda em relação ao cruzamento com três soluções, conforme mostrado na Tabela 16, sendo que todos os hipervolumes tomaram com base o mesmo ponto de referência. A mediana para o valor de hipervolume para o Algoritmo 1 resultou em 0,970, e para o Algoritmo 2 em 0,9680.

Figura 11 – Soluções não dominadas da primeira execução do Algoritmo 1 e ponto de referência.



Fonte: A Autora

De posse desses dados utilizou-se o programa R-project x64 v 3.3.3, que realiza o teste de Wilcoxon-Mann-Whitney, para verificar se duas amostras são equivalentes ou não. Nesse caso, o intuito foi verificar se os Algoritmos 1 e 2.

Nesse teste as amostras são diferentes quando a significância estatística for menor que 5%, ou seja, valor-p < 0,05. Submetendo-se o arquivo de hipervolumes, o valor resultante foi valor-p = 0,8707, que indicou que não existem diferenças significativas entre os algoritmos 1 e 2.

A fim de se verificar se nesse teste algum dos algoritmos produziu mais soluções não dominadas em relação ao outro, fez-se a ordenação pela não dominância dos valores objetivos retornados de todas as execuções, e eliminou-se todas as soluções que fossem dominadas ou repetidas, que resultou em 129 soluções não dominadas, que são apresentadas na Tabela 17, no Anexo A.

Tabela 16 – Matriz de hipervolumes.

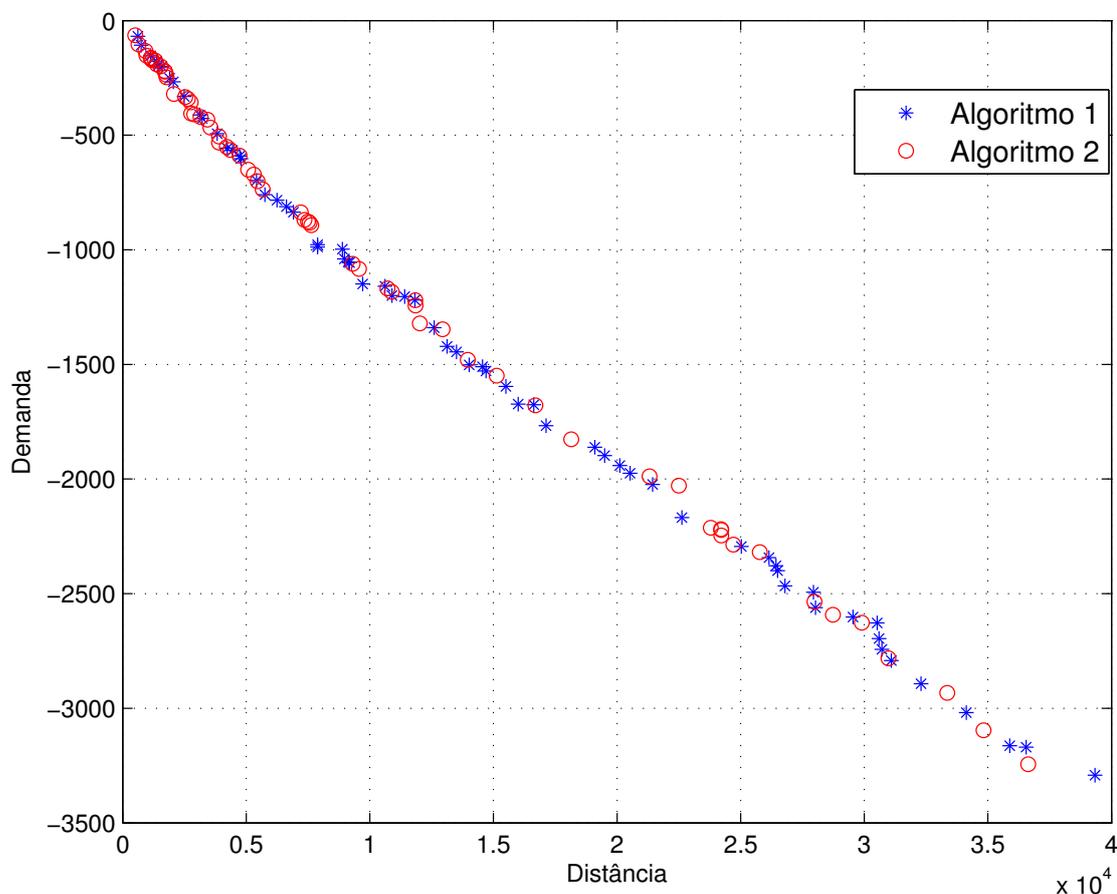
Algoritmo 1	Algoritmo 2
0,965000	0,959000
0,965000	0,971000
0,978000	0,967000
0,946000	0,977000
0,978000	0,973000
0,975000	0,967000
0,987000	0,962000
0,974000	0,937000
0,970000	0,978000
0,981000	0,964000
0,962000	0,982000
0,981000	0,969000
0,966000	0,967000
0,974000	0,972000
0,957000	0,974000
0,979000	0,963000
0,970000	0,954000
0,944000	0,984000
0,979000	0,965000
0,925000	0,965000
0,969000	0,986000
0,970000	0,966000
0,938000	0,975000
0,951000	0,964000
0,938000	0,981000
0,964000	0,978000
0,962000	0,900000
0,973000	0,971000
0,986000	0,979000
0,977000	0,966000

Desse total de soluções, 65 (ou 50,4%) são soluções provenientes do Algoritmo 1, e as outras 64 (49,6%) foram obtidas por meio do Algoritmo 2, o que reforça que ambos os algoritmos são equivalentes entre si. A representação gráfica de todas essas é apresentada na Figura 12.

Além disso foi feito ainda a junção dos valores de objetivos de todas as execuções de cada um dos algoritmos, eliminou-se as repetições, e fez-se a ordenação pela não dominância. O resultado é apresentado nas Tabelas 18 e 19, no Anexo A. O Algoritmo 1 gerou 100 soluções distintas, enquanto o Algoritmo 2 gerou 102. Comparando esse dado, ao total de soluções não dominadas globalmente (129) apresentado anteriormente, percebe-se que os algoritmos em grande parte das vezes produziram as mesmas soluções.

A Figura 13 mostra o gráfico que apresenta as soluções não dominadas globalmente

Figura 12 – Soluções não dominadas globalmente.



Fonte: A Autora

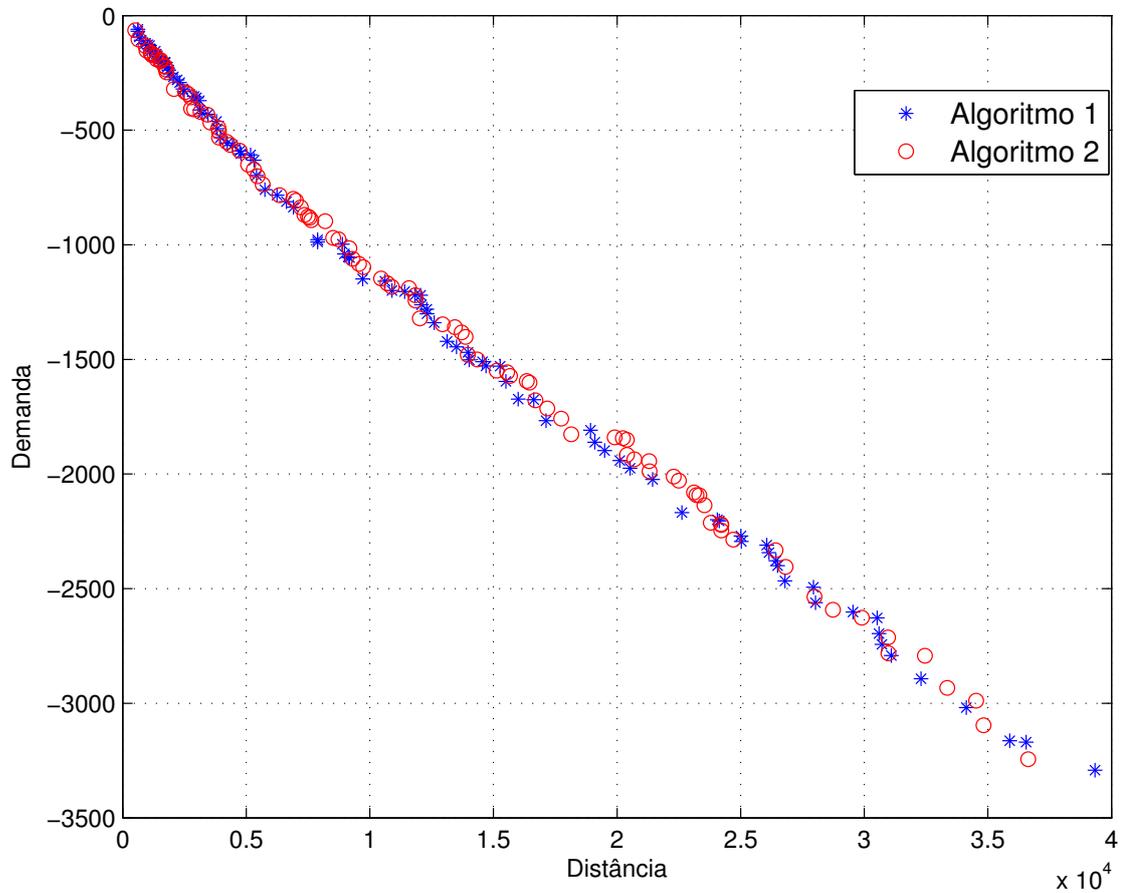
para cada um dos algoritmos.

## 5.2 Entrevista à Empresa de Ônibus

Foi realizada uma entrevista à uma empresa de ônibus da cidade de Timóteo a fim de verificar se o modelo adotado por este trabalho aproxima-se ao praticado por essa empresa. Essa entrevista, disponível no Anexo B, mostrou que existem restrições práticas de suma importância que devem ser obedecidas ao se fazer o serviço de coleta e entrega de passageiros, como critérios de obrigatoriedade de regiões que necessitam de ser atendidas, e proibições quanto ao acesso a determinadas regiões, devido à perigosidade, por exemplo.

Embora não seja a empresa quem defina as rotas, e sim o poder público municipal, as informações obtidas permitiu perceber que parte das restrições adotadas aproximam ao praticado, como pontos de ônibus iniciais de finais fixos, e o controle da demanda atendida

Figura 13 – Soluções não dominadas globalmente.



Fonte: A Autora

por pontos de ônibus, e que algumas adaptações ao modelo, como critérios de obrigatoriedade e proibições, bem como permissão de ciclos em locais específicos e pontos de ônibus pré-definidos, o tornariam mais robusto e plausível de ser usado para comparação prática e na proposição de rotas que mapeiem a região em questão.

## 6 Conclusão e Trabalhos Futuros

### 6.1 Conclusão

O serviço de transporte público é uma das necessidades básicas de qualquer cidade. Por ser indispensável no cotidiano de grande parte da população, melhoras no fornecimento desse contribui significativamente para o bem estar social. O estudo de roteamento urbano, na proposição de rotas que atendam ao maior número de pessoas, com o menor custo possível beneficia bilateralmente a empresa fornecedora do serviço e os usuários do mesmo.

Por causa disso, considerou-se interessante tratar esse problema, nesse trabalho, como um POM, visto que apresenta objetivos conflitantes, que devem ser tratados de maneira simultânea. Como indicado pela literatura, pode-se utilizar um AE para propor rotas que seja não dominadas na perspectiva multiobjetivo, visto que esses tem se mostrado promissores para essa classe de problemas. Nesse contexto, optou-se por utilizar o AE DEMO para resolvê-lo, dadas as vantagens do método, como rápida convergência, simplicidade, robustez, e o fato de a bibliografia mostrar que o mesmo tem apresentado bons resultados para POMs.

Na geração dessas rotas foi utilizado um operador de cruzamento com duas versões de cruzamento para geração da população filha, e um de mutação. Ao final, de posse dessas soluções, calculou-se o hipervolume das soluções, a fim de comparar as duas formas utilizadas para o cruzamento. Os resultados dos testes indicaram que das duas versões de cruzamento utilizados não produzem resultados necessariamente distintos, sendo portanto equivalentes.

A entrevista realizada permitiu perceber que o modelo se aproxima ao adotado, mas que necessitaria de algumas adequações para ser utilizada num contexto real.

Conforme proposto, a aplicação referente a DEMO gera um conjunto de soluções não dominadas, que respeitam às restrições pré-estabelecidas, bem como a sugestão da localização dos pontos de ônibus, que respeitam as distâncias máxima e mínima fornecidas. Por meio dos gráficos pode-se confirmar visualmente que tais soluções são não dominadas, sendo portanto promissoras para o caso de uso apresentado. Em um contexto real, pode-se escolher a solução não dominada, que melhor se adequa ao caso de uso estudado.

### 6.2 Trabalhos Futuros

Para os trabalhos futuros, recomenda-se utilizar um algoritmo que sugira a localização dos pontos de ônibus sobre as arestas, tal qual é em grande parte das situações práti-

cas. Sugere-se ainda que leve-se em consideração critérios de proibições e obrigatoriedades quanto à localização desses, que nesse trabalho não foi utilizado.

Recomenda-se também acrescentar intervalos de exceção à restrição de distância máxima e mínima entre os pontos de ônibus e considerar percurso de ida e volta tanto nas restrições, como no cálculo da população atendida por uma linha.

Propõe-se ainda utilizar um caso de uso mais próximo da realidade regional em que a instituição encontra-se inserida, para que se consiga comparar as soluções obtidas com as atualmente utilizadas, e com isso sugerir intervenções políticas quanto às rotas percorridas, objetivando sempre o equilíbrio entre a distância percorrida e a demanda atendida e o bem estar público.

# Referências

- ABBASS, H. A. An evolutionary artificial neural networks approach for breast cancer diagnosis. *Artificial intelligence in Medicine*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 265–281, 2002. Citado na página 21.
- AQUINO, R. d. F. et al. Algoritmos de otimização multi-objetivo para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo. Universidade Federal de Viçosa, 2015. Citado nas páginas 13 e 18.
- ARBEX, R. O. *Projeto de redes otimizadas de transporte público por ônibus utilizando algoritmo genético*. 2017. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado na página 13.
- ASSIS, L. P. *INVESTIGAÇÃO DE METAHEURÍSTICAS APLICADAS AO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS MULTI OBJETIVO COM COLETA OPCIONAL*. 2013. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2013. Citado na página 19.
- ÁVILA, S. L. et al. Otimização multiobjetivo e análise de sensibilidade para concepção de dispositivos: aplicação: síntese de antenas refletoras para comunicação via satélite. Florianópolis, SC, 2006. Citado na página 13.
- AZUMA, R. M. *Otimização multiobjetivo em problema de estoque e roteamento gerenciados pelo fornecedor*. 2011. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, 2011. Citado na página 19.
- BABU, B.; ANBARASU, B. Multi-objective differential evolution (mode): an evolutionary algorithm for multi-objective optimization problems (moops). In: *Proceedings of International Symposium and 58th Annual Session of IICChE*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado nas páginas 21 e 23.
- BRAGA, D. O.; NUNES, R. D. A. *O USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS PARA OTIMIZAÇÃO DAS ROTAS DE ÔNIBUS DE RIO PARANAÍBA*. [S.l.], 2014. Citado nas páginas 13 e 26.
- BRASIL. Presidência da República. *LEI Nº 12.587*. Casa civil. subchefia para assuntos jurídicos. Brasília, 2012. Diário Oficial da União, 04 de jan. 2012. Citado na página 12.
- CHENG, J.; ZHANG, G. Multi-objective differential evolution: a recent survey. *SCA: International Journal of Soft Computing with Applications*, v. 1, n. 1, p. 1–9, 2013. Citado nas páginas 23 e 24.
- COELLO, C. A. C.; VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. [S.l.]: Springer, 2002. v. 242. Citado na página 21.
- COELLO, C. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado na página 21.
- CORDEIRO, F. R. *UMA FERRAMENTA DE SIMULAÇÃO PARA OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVA EVOLUCIONÁRIA*. 2008. Citado na página 38.
- CRUZ-RAMÍREZ, M. et al. Memetic pareto differential evolutionary artificial neural networks to determine growth multi-classes in predictive microbiology. *Evolutionary intelligence*, Springer, v. 3, n. 3-4, p. 187–199, 2010. Citado na página 24.

- DAS, S. et al. Differential evolution using a neighborhood-based mutation operator. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 13, n. 3, p. 526–553, 2009. Citado na página 22.
- DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 4–31, 2011. Citado na página 22.
- DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. v. 16. Citado nas páginas 13 e 19.
- DIAS, J. M. *Localização Dinâmica. Modelos e Técnicas*. [S.l.]: Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2010. Citado na página 21.
- FIGUEIREDO, D. D.; SOUZA, L. V. de; ARAÚJO, A. S. de. Algoritmo evolução diferencial adaptado para o problema das p-medianas. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 2, n. 1, 2014. Citado na página 22.
- FONSECA, C. M.; FLEMING, P. J. et al. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation discussion and generalization. In: CITESEER. *ICGA*. [S.l.], 1993. v. 93, p. 416–423. Citado na página 21.
- FONSECA, O. P. et al. Abordagem multiobjetivo para o problema de roteamento de veículos aberto. 2012. Citado na página 13.
- GASPAR-CUNHA, A.; TAKAHASHI, R.; ANTUNES, C. H. *Manual de computação evolutiva e metaheurística*. [S.l.]: Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2012. Citado na página 19.
- GOLDBARG, M. C. et al. Algoritmo evolucionário para otimização do plano de tratamento em radioterapia conformal 3d. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 29, n. 2, p. 239–267, 2009. Citado na página 38.
- GOUDOS, S. K.; SAHALOS, J. N. Pareto optimal microwave filter design using multiobjective differential evolution. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 58, n. 1, p. 132–144, 2010. Citado na página 24.
- GUIMARÃES, F. G. Algoritmos de evolução diferencial para otimização e aprendizado de máquina. In: *IX Congresso Brasileiro de Redes Neurais*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 22.
- HOLLANDER, M.; WOLFE, D. A.; CHICKEN, E. *Nonparametric statistical methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 39.
- KAVEH, A.; LAKNEJADI, K.; ALINEJAD, B. Performance-based multi-objective optimization of large steel structures. *Acta Mechanica*, Springer, v. 223, n. 2, p. 355–369, 2012. Citado na página 24.
- KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, Elsevier, v. 91, n. 9, p. 992–1007, 2006. Citado na página 20.
- KULKARNI, R.; BHAVE, P. R. Integer programming formulations of vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 58–67, 1985. Citado na página 13.

- LI, Y.-F.; SANSAVINI, G.; ZIO, E. Non-dominated sorting binary differential evolution for the multi-objective optimization of cascading failures protection in complex networks. *Reliability Engineering & System Safety*, Elsevier, v. 111, p. 195–205, 2013. Citado na página 24.
- MENDES, R. S. Abordagem multiobjetivo para o problema de roteamento de veículos com transporte reativo a demanda. 2016. Citado nas páginas 12 e 18.
- NOSRATI, M.; KARIMI, R.; HASANVAND, H. A. Investigation of the\*(star) search algorithms: Characteristics, methods and approaches. *World Applied Programming*, v. 2, n. 4, p. 251–256, 2012. Citado na página 18.
- OLIVEIRA, G. T. d. S. *Estudo e aplicações da evolução diferencial*. 2006. Tese (Doutorado), 2006. Citado na página 13.
- OLIVEIRA, G. T. da S.; SARAMAGO, S. F. P. Estratégias de evolução diferencial aplicadas a problemas de otimização restritos. 2005. Citado nas páginas 21 e 26.
- PESSÔA, M. W.; COELHO, L. D. S. Otimização de controle pid multivariável baseada em evolução diferencial: Projeto e aplicação prática no processo ball-and-plate. Citado na página 14.
- PRADO, R. S. et al. Uma nova abordagem para a evolução diferencial em otimização discreta. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática. Bonito-MS*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 21.
- QIAN, B. et al. An effective hybrid de-based algorithm for multi-objective flow shop scheduling with limited buffers. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 209–233, 2009. Citado na página 24.
- QIN, H. et al. Multi-objective cultured differential evolution for generating optimal trade-offs in reservoir flood control operation. *Water resources management*, Springer, v. 24, n. 11, p. 2611–2632, 2010. Citado na página 24.
- RAHNAMAYAN, S.; TIZHOOSH, H. R.; SALAMA, M. M. Opposition-based differential evolution. *IEEE Transactions on Evolutionary computation*, IEEE, v. 12, n. 1, p. 64–79, 2008. Citado na página 22.
- RAUPP, F. M. P. *Um método heurístico para o problema de escalonamento multiobjetivo em vários ambientes de máquinas*. 2012. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2012. Citado nas páginas 19 e 20.
- REDDY, M. J.; KUMAR, D. N. Multiobjective differential evolution with application to reservoir system optimization. *Journal of Computing in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 21, n. 2, p. 136–146, 2007. Citado nas páginas 13 e 22.
- ROBIČ, T.; FILIPIČ, B. Demo: Differential evolution for multiobjective optimization. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2005. p. 520–533. Citado nas páginas 22 e 23.
- ROCHA, N. C.; SARAMAGO, S. d. F. P. Estudo de algumas estratégias de evolução diferencial. In: *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Sudeste*. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 14.
- SANTANA, G. O. et al. Uma proposta para otimização de sistemas de transporte coletivo por algoritmos genéticos. *Journal of Exact Sciences*, v. 18, n. 1, 2012. Citado na página 13.

- SEDGEWICK, R. *Shortest Paths*. 2016. Material complementar ao livro. Disponível em:<<http://algs4.cs.princeton.edu/44sp/1000EWD.txt>>, Acesso em: 15 de junho de 2017. Citado na página 41.
- SKIENA, S. Dijkstra's algorithm. *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Reading, MA: Addison-Wesley, p. 225–227, 1990. Citado na página 18.
- SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 2, n. 3, p. 221–248, 1994. Citado na página 21.
- STEINER, M. T. A. et al. O problema de roteamento no transporte escolar. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 20, n. 1, p. 83–99, 2000. Citado na página 12.
- TASGETIREN, M. F.; SUGANTHAN, P. N.; PAN, Q.-K. An ensemble of discrete differential evolution algorithms for solving the generalized traveling salesman problem. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 215, n. 9, p. 3356–3368, 2010. Citado na página 22.
- VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 8, n. 2, p. 125–147, 2000. Citado na página 21.
- VIEIRA, B. S. Uma proposta multiobjetivo para o problema de roteamento de veículos capacitados acumulativo. *XIII Rio de Eventos*, 2015. Citado na página 13.
- WRIGHT, J. A. et al. Multi-objective optimization of cellular fenestration by an evolutionary algorithm. *Journal of Building Performance Simulation*, Taylor & Francis, v. 7, n. 1, p. 33–51, 2014. Citado na página 38.
- WU, L. et al. Environmental/economic power dispatch problem using multi-objective differential evolution algorithm. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 80, n. 9, p. 1171–1181, 2010. Citado na página 24.
- ZANI, S. *TESTES NÃO PARAMÉTRICOS*. 2009. Nota de aula. Disponível em:<<http://epge.fgv.br/we/Graduacao/Estatistica1/2009/2?action=AttachFile&do=get&target=teste-dos-sinais-wilcoxon-e-mann-whitney.pdf>>, Acesso em: 27 de junho de 2017. Citado na página 39.
- ZHANG, H. et al. An efficient multi-objective adaptive differential evolution with chaotic neuron network and its application on long-term hydropower operation with considering ecological environment problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 60–70, 2013. Citado na página 24.
- ZHANG, J.; SANDERSON, A. C. Jade: adaptive differential evolution with optional external archive. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 13, n. 5, p. 945–958, 2009. Citado na página 22.
- ZHONG, Y.; ZHANG, S.; ZHANG, L. Automatic fuzzy clustering based on adaptive multi-objective differential evolution for remote sensing imagery. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, IEEE, v. 6, n. 5, p. 2290–2301, 2013. Citado na página 24.
- ZITZLER, E. et al. Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. In: *Eurogen*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3242, n. 103, p. 95–100. Citado na página 21.

---

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study. In: SPRINGER. *international conference on parallel problem solving from nature*. [S.l.], 1998. p. 292–301. Citado na página 38.

# ANEXO A – Tabelas

Tabela 17 – Soluções não dominadas globalmente.

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>	<b>Algoritmo de Origem</b>
506,98	64	2
615,57	69	1
642,16	104	2
750,15	108	1
923,14	133	2
965,30	153	2
1131,57	154	1
1139,86	163	2
1144,04	167	2
1199,47	173	2
1309,87	174	2
1378,91	177	1
1381,24	191	2
1428,99	197	1
1540,14	200	2
1586,20	201	1
1699,57	220	2
1714,87	223	2
1765,06	236	2
1776,23	248	2
1898,97	252	1
2049,28	267	1
2077,86	321	2
2492,95	331	1
2535,93	334	2
2640,18	342	2
2755,95	357	2
2773,89	406	2
2894,13	409	2
3121,24	412	1
3151,27	421	2
3222,66	427	1
3427,31	432	2
3548,68	467	2
3822,76	494	1

*Continua na próxima página*

Tabela 17 – *Soluções não dominadas globalmente em relação aos Algoritmos 1 e 2.*

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>	<b>Algoritmo de Origem</b>
3898,20	506	2
3898,22	533	2
4215,30	551	2
4229,74	557	1
4357,45	565	2
4443,57	566	1
4728,85	589	2
4734,85	591	1
4788,51	603	1
5080,15	651	2
5312,30	672	2
5413,43	698	1
5459,83	701	2
5665,99	737	2
5760,23	760	1
6246,35	784	1
6622,67	812	1
6910,14	836	1
7204,34	837	2
7352,48	870	2
7493,83	877	2
7559,57	882	2
7625,71	893	2
7884,22	978	1
7887,13	988	1
8891,94	997	1
8973,56	1040	1
9133,64	1053	1
9180,69	1056	1
9305,47	1061	2
9563,80	1083	2
9707,03	1149	1
10612,23	1159	1
10714,73	1169	2
10889,67	1184	2
10894,88	1200	1
11406,21	1204	1
11825,17	1219	1
11844,16	1220	2
11844,71	1243	2

*Continua na próxima página*

Tabela 17 – *Soluções não dominadas globalmente em relação aos Algoritmos 1 e 2.*

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>	<b>Algoritmo de Origem</b>
12024,18	1321	2
12606,31	1340	1
12938,51	1347	2
13122,67	1421	1
13508,65	1445	1
13959,79	1480	2
14022,92	1502	1
14555,24	1510	1
14697,47	1529	1
15127,79	1549	2
15504,15	1596	1
16002,61	1673	1
16626,76	1676	1
16698,47	1679	2
17131,09	1767	1
18147,60	1827	2
19096,66	1861	1
19495,45	1898	1
20108,46	1941	1
20526,35	1975	1
21312,16	1988	2
21434,28	2024	1
22500,47	2029	2
22623,26	2168	1
23791,26	2213	2
24203,78	2219	2
24212,40	2222	2
24215,45	2246	2
24703,55	2286	2
25025,48	2294	1
25769,76	2319	2
26141,80	2343	1
26424,60	2378	1
26495,39	2400	1
26794,75	2466	1
27942,71	2494	1
27987,59	2535	2
28024,69	2561	1
28731,43	2592	2
29545,70	2602	1

*Continua na próxima página*

Tabela 17 – Soluções não dominadas globalmente em relação aos Algoritmos 1 e 2.

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>	<b>Algoritmo de Origem</b>
29898,65	2627	2
30524,40	2628	1
30593,14	2696	1
30710,96	2743	1
30980,42	2782	2
31092,84	2792	1
32299,31	2893	1
33358,84	2933	2
34126,33	3019	1
34823,00	3096	2
35882,51	3163	1
36545,16	3170	1
36627,52	3244	2
39332,42	3292	1

Tabela 18 – Soluções não dominadas Algoritmo 1.

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
614,20	60
615,57	69
677,63	94
750,15	108
935,55	122
1019,02	127
1087,63	131
1093,62	144
1131,57	154
1323,97	156
1361,59	168
1378,91	177
1384,99	180
1428,99	197
1586,20	201
1700,79	204
1727,89	205
1801,65	226
1864,93	238
1898,97	252
2049,28	267
2210,02	281

*Continua na próxima página*

Tabela 18 – Soluções não dominadas Algoritmos 1

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
2310,45	292
2440,20	321
2492,95	331
2893,86	353
2985,82	359
3104,63	371
3121,24	412
3222,66	427
3455,90	431
3796,95	462
3822,76	494
3961,17	533
4229,74	557
4443,57	566
4734,85	591
4788,51	603
5177,69	608
5315,52	631
5413,43	698
5760,23	760
6246,35	784
6622,67	812
6910,14	836
7884,22	978
7887,13	988
8891,94	997
8973,56	1040
9133,64	1053
9180,69	1056
9707,03	1149
10612,23	1159
10894,88	1200
11406,21	1204
11825,17	1219
12053,25	1220
12090,08	1262
12308,04	1281
12316,07	1301
12606,31	1340
13122,67	1421

*Continua na próxima página*

Tabela 18 – *Soluções não dominadas Algoritmos 1*

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
13508,65	1445
13966,70	1469
14022,92	1502
14555,24	1510
14697,47	1529
15271,41	1530
15504,15	1596
16002,61	1673
16626,76	1676
17131,09	1767
18928,52	1809
19096,66	1861
19495,45	1898
20108,46	1941
20526,35	1975
21434,28	2024
22623,26	2168
24053,89	2199
24132,16	2205
25014,08	2270
25025,48	2294
26050,92	2310
26141,80	2343
26424,60	2378
26495,39	2400
26794,75	2466
27942,71	2494
28024,69	2561
29545,70	2602
30524,40	2628
30593,14	2696
30710,96	2743
31092,84	2792
32299,31	2893
34126,33	3019
35882,51	3163
36545,16	3170
39332,42	3292

Tabela 19 – Soluções não dominadas Algoritmo 2.

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
506,98	64
642,16	104
923,14	133
965,30	153
1139,86	163
1144,04	167
1199,47	173
1309,87	174
1381,24	191
1531,48	194
1540,14	200
1699,57	220
1714,87	223
1765,07	236
1776,23	248
2077,86	321
2535,93	334
2640,18	342
2755,95	357
2773,89	406
2894,13	409
3151,27	421
3427,31	432
3548,68	467
3871,86	490
3898,20	506
3898,22	533
4215,30	551
4357,45	565
4728,85	589
5080,15	651
5312,30	672
5459,83	701
5666,00	737
6345,94	784
6909,76	800
7005,21	808
7204,34	837
7352,48	870

*Continua na próxima página*

Tabela 19 – Soluções não dominadas Algoritmos 2

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
7493,83	877
7559,57	882
7625,71	893
8197,22	897
8518,97	970
8732,47	976
9174,22	1015
9305,47	1061
9563,80	1083
9738,74	1098
10456,40	1147
10714,73	1169
10889,67	1184
11581,86	1189
11844,16	1220
11844,71	1243
12024,18	1321
12938,51	1347
13439,07	1359
13711,99	1382
13869,25	1402
13959,79	1480
14345,62	1500
15127,79	1549
15551,57	1556
15668,64	1572
16348,66	1594
16459,30	1601
16698,47	1679
17176,19	1714
17740,85	1758
18147,60	1827
19908,49	1840
20237,54	1844
20392,97	1851
20403,60	1916
20696,62	1936
21296,57	1944
21312,16	1988
22295,34	2011

*Continua na próxima página*

Tabela 19 – *Soluções não dominadas Algoritmos 2*

<b>Distância</b>	<b>Demanda</b>
22500,47	2029
23114,18	2080
23212,36	2092
23329,12	2093
23534,50	2136
23791,26	2213
24203,78	2219
24212,40	2222
24215,45	2246
24703,55	2286
25769,76	2319
26410,60	2332
26813,19	2405
27987,60	2535
28731,43	2592
29898,65	2627
30961,33	2713
30980,42	2782
32450,16	2793
33358,84	2933
34525,02	2989
34823,00	3096
36627,52	3244

## ANEXO B – Entrevista à empresa de ônibus que atende a cidade de Timóteo

Foi realizada uma entrevista à empresa de ônibus Autotrans, que atende as cidades de Timóteo, Cel. Fabriciano e Ipatinga, sob o intuito de saber qual a metodologia a empresa adota para criar e modificar as rotas que os ônibus percorrem para atender a população, bem como as restrições práticas adotadas, a fim de comparar com as empregadas no modelo deste estudo.

Nessa entrevista, fez-se as seguintes constatações. Todo o roteamento é definido e alterado pelo poder público concedente, isto é, a prefeitura. Segundo a empresa, a mesma somente faz no cotidiano desvios, quando há impossibilidades de seguir no percurso pré-estabelecido. No caso de haver necessidade de fazer alguma alteração para o benefício conjunto da comunidade, empresa e prefeitura, a empresa primeiro precisa fazer um estudo de caso com a comunidade, e se essa demonstrar aceitação, e apresentá-lo à prefeitura para análise.

Uma das restrições do modelo em estudo, é a obrigatoriedade de se passar em determinados locais, e a proibição de se passar em outros. Segundo a empresa, essa é uma necessidade regular, já que há lugares que eles devem atender em determinados horários, como por exemplo, o horário de término de expediente de algumas das grandes empresas locais, e também há locais que por questão de segurança (locais muito ingrimes para o ônibus subir, por exemplo) que não se pode passar.

Nesse modelo, determinou-se que tanto o ponto inicial, quanto o final, são fixos. Atrelado a isso, a empresa informou que uma restrição que deve ser atendida por todos as linhas, é que essas devem começar o percurso pelo terminal de integração.

Perguntou-se ainda se é realizado o estudo sistematizado das rotas utilizadas a fim de identificar possíveis melhorias que podem ser feitas para maximizar o atendimento e/ou diminuir a distância percorrida. A empresa informou que é feito esse estudo e pesquisas de embarque e desembarque e pontos estratégicos, visando haver um equilíbrio entre a demanda e a quilometragem percorrida. Novamente foi ressaltado que qualquer mudança carece de aprovação pelo poder concedente. Em relação ao atendimento, no que diz respeito a quantidade de pessoas atendidas em cada ponto de parada e comparativos em relação a diferentes rotas que atende a mesma região, a empresa apresentou relatórios que permitem ver com clareza esse tipo de informação, que é facilmente obtida por meio do sistema de bilhetagem eletrônica.

Com base nessa pesquisa, pode-se perceber que boa parte das restrições do modelo apresentado vai de encontro ao que acontece na prática. Todavia, não foi possível obter a informação da forma real como as rotas foram planejadas.

### Termo de consentimento

Eu, Samara Silva Santos, aluna da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do CEFET-MG Timóteo, estou desenvolvendo minha monografia com o tema: "Uma abordagem multiobjetivo para o problema de roteamento de transporte público" sob a orientação do professor Msc. André Rodrigues da Cruz. Nessa etapa do trabalho, gostaríamos de saber como é a metodologia da empresa para criar e modificar as rotas (caminhos) que os ônibus percorrem para atender a população. Nos é interessante também saber quais as restrições práticas a empresa deve seguir ao definir essa rota e quais são as demandas que possuem para melhorar a qualidade do serviço e no que nós, enquanto academia, poderemos contribuir para melhorias.

Por causa disso, estamos realizando essa pesquisa e solicitamos seu consentimento para a realização e gravação de uma entrevista. Para decidir sobre o seu consentimento, é importante que você conheça as seguintes informações sobre a pesquisa:

- Os dados coletados durante a entrevista destinam-se estritamente a atividades de análise da metodologia utilizada pela empresa e serão usados exclusivamente para este trabalho;
- A divulgação dos resultados pauta-se no respeito à sua privacidade, e o anonimato dos participantes será preservado em quaisquer documentos que elaboramos;
- O consentimento para a entrevista é uma escolha livre, feita mediante a prestação de todos os esclarecimentos necessários sobre a pesquisa;
- A entrevista pode ser interrompida a qualquer momento, segundo a sua disponibilidade e vontade;
- Nossa equipe encontra-se disponível para contato através dos e-mails
  - samara@timoteo.cefetmg.br
  - samara.silva1994@hotmail.com
  - andreacruz@timoteo.cefetmg.br

De posse dessas informações, gostaríamos que você se pronunciasse acerca da entrevista:

Dou meu consentimento para a sua realização

Não consinto com a sua realização

Timóteo, 21 de Março de 2017

Samara S. Santos  
Entrevistador

José Gomes de Sousa Coordenador  
de Tráfego /  
Transportes  
Entrevistado

jjgomes@autotransnet.com.br

## Questionário

1. Você poderia descrever como é feito para criar ou alterar uma rota para atender uma determinada região da cidade.

Não temos autonomia p/ alterar rotas, apenas pedimos desvio, um itinerário qdo um local estiver interditado. As rotas são definidas pelo poder concedente (PMT).

- a. São utilizados algoritmos para definição dessas rotas? Se sim, quais?

Como é a prefeitura que faz as solicitações de rotas ou alterações, não sei dizer se eles tem algum software, mas temos um software de controle.

2. Quais são os critérios e objetivos levados em consideração na definição de rotas?

Elas necessitam alterar ou definir rota, nós reunimos com a comunidade, apresentamos os dados e posteriormente se aprovados, pedimos alteração a prefeitura, conforme informado acima são eles que tem o poder de decisão.

3. Existem restrições que devem ser atendidas por uma determinada linha, num dado horário?

Locais inseguros, como por um itinerário que estabelece do pelo P.P., ex: passar no B. Alto da Pedreira.

- a. Existem restrições que devem ser atendidas por todas as linhas?

Sim que são obrigatoriamente do Terminal de Integração.

4. Existem lugares específicos que devem ser obrigatoriamente atendidos por uma determinada linha num dado horário? E locais que não podem passar?

Sim atender o horário de pontaria da Apicrom e da Emaltb. Não estamos na Rua Mantara no B. Macuco - motivo local muito perigoso no sentido de proporcionar segurança aos clientes e funcionários.

5. É feito o estudo sistemático das rotas utilizadas a fim de identificar possíveis melhorias que podem ser feitas para maximizar o atendimento e/ou diminuir a distância percorrida?

Sim fazemos estudos e pesquisas de embarque e desembarque, pontos estratégicos para acompanharmos a demanda e a Km rodada, mas, sempre que tem necessidade de fazer algo é necessário apresentar ao P.P. / pedir autorizações.

6. A empresa observa a quantidade de pessoas que atende em cada ponto de ônibus e faz comparativos entre o atendimento de rotas diferentes rotas para o mesmo local?

Sim, fazemos análises dos relatórios simulados ao sistema de behavioramento eletrônico onde faremos, demanda distribuída por pontos, horários e após organização dos dados, qdo a necessidade de uma intervenção, solicitamos autorizações ao P.P.

- 
- 
7. Como o CEFET-MG e os estudantes de Engenharia de Computação poderiam contribuir para melhoria da oferta de transporte público da cidade?

Participar das mudanças e da necessidade dando opiniões e sugestões de melhorias contínuas no que tange a definição de itinerário, horário, cujo intuito seja, a satisfação do PE, empresa e cliente.