

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
CAMPUS TIMÓTEO**

Luamós Úride Soares Faria

**APLICAÇÃO DE RESTRIÇÕES PRÁTICAS EM UM MODELO DE
POSICIONAMENTO CONTÍNUO PARA O CARREGAMENTO DE
CONTÊINERES**

Timóteo

2016

Luamós Úride Soares Faria

**APLICAÇÃO DE RESTRIÇÕES PRÁTICAS EM UM MODELO DE
POSICIONAMENTO CONTÍNUO PARA O CARREGAMENTO DE
CONTÊINERES**

Monografia apresentada à Coordenação de Engenharia de Computação do Campus Timóteo do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: André Rodrigues da Cruz

Timóteo

2016

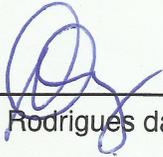
Luamós Úride Soares Faria

**APLICAÇÃO DE RESTRIÇÕES PRÁTICAS EM UM MODELO DE
POSICIONAMENTO CONTÍNUO PARA O CARREGAMENTO DE
CONTÊINERES**

Monografia apresentada à Coordenação de Engenharia de Computação do Campus Timóteo do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: André Rodrigues da Cruz

Trabalho aprovado. Timóteo, 13 de dezembro de 2016:



André Rodrigues da Cruz(Orientador)



João Batista Queiroz Zuliani



Rutele Ribeiro Caldeira Moreira

Timóteo, 13 de dezembro de 2016

Dedico a meus
familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me sustentado e dado sabedoria para vencer mais esta etapa da minha vida acadêmica. A meus pais, Luciano Soares da Silva e Maura Gomes de Faria, por sempre me apoiarem durante todos esses anos. A minha namorada, Samara Silva Santos, pela paciência e companheirismo durante nossa graduação. A meu orientador André Rodrigues da Cruz por me instruir e direcionar na produção desse trabalho. E finalmente, a todos os meus professores por me repassarem os conhecimentos necessários para chegar até aqui.

Resumo

Tendo em vista o grande uso de unitização de carga na logística, com contêineres por exemplo, cresce a necessidade de se encontrar arranjos ótimos para as caixas a serem armazenadas, de forma a maximizar o volume transportado em cada receptáculo. Para isso, podem ser utilizados modelos matemáticos que forneçam a solução desejada. Porém, para uso prático, é preciso que tratem questões relevantes como a orientação, o peso suportado, a ordem de descarregamento, a prioridade e a estabilidade das caixas, além do limite e da distribuição de peso no contêiner e do carregamento completo de grupos de caixas. Assim, este trabalho objetiva adicionar as restrições práticas citadas a um modelo de carregamento de contêiner com posicionamento contínuo que somente possua restrições de não sobreposição de caixas.

Palavras-chave: Problema de Carregamento de Contêineres, Modelo Matemático, Programação Linear Inteira Mista, Restrições Práticas.

Abstract

Considering the extensive use of load unitization in logistics, for example with containers, it grows the need to find optimal arrangements for the boxes to be stored, in order to maximize the transported volume in each receptacle. For this purpose, it can be used mathematical models to provide the desired solution. However, for practical use, it is necessary to address relevant issues such as guidance, supported weight, unloading order, priority, and the stability of the boxes, besides the weight limits and the weight distribution in the container and full loading of groups of boxes. In this way, this work aims to add the practical constraints previously mentioned to a container loading model with continuous positioning that only has non-overlapping box constraints.

Keywords: Container Loading Problem, Mathematical Modeling, Mixed Integer Linear Programming , Practical Constraints.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Exemplo 1 de caixas compartilhando vários valores de coordenadas de determinado eixo | 27 |
| Figura 2 – Exemplo 2 de caixas compartilhando vários valores de coordenadas de determinado eixo | 28 |
| Figura 3 – Exemplo de caixas compartilhando 1 valor de coordenada de determinado eixo | 28 |
| Figura 4 – Exemplo de caixas não compartilhando valor de coordenada de determinado eixo | 29 |
| Figura 5 – Exemplo de caixas se sobrepondo | 30 |
| Figura 6 – Exemplo de caixas com estabilidade vertical | 32 |
| Figura 7 – Exemplo de estabilidade vertical inválida | 33 |
| Figura 8 – Exemplo de empilhamento de caixas | 35 |
| Figura 9 – Exemplo de problema no empilhamento de caixas | 36 |
| Figura 10 – Exemplo para ordenação de caixas | 37 |
| Figura 11 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas | 45 |
| Figura 12 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Orientação com a Altura Fixada | 46 |
| Figura 13 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Limite de Peso no Contêiner | 48 |
| Figura 14 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Distribuição de Peso no Contêiner | 49 |
| Figura 15 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Carregamento Completo de Grupos de Caixas | 51 |
| Figura 16 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Prioridade de Caixas | 52 |
| Figura 17 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Múltiplos Destinos | 54 |
| Figura 18 – Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Empilhamento | 55 |
| Figura 19 – Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas | 57 |
| Figura 20 – Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidade Vertical | 58 |
| Figura 21 – Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidades Vertical e Horizontal no Eixo Y | 59 |
| Figura 22 – Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidades Vertical e Horizontais nos eixos X e Y | 60 |
| Figura 23 – Resultado do Caso de Uso 3 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas | 62 |
| Figura 24 – Resultado do Caso de Uso 3 - Modelo com Restrições de altura fixa, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade vertical, carregamento completo de grupos de caixas, limite e distribuição de peso no contêiner | 64 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Restrições práticas apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995) | 15 |
| Tabela 2 – Quantidade de cada variável do modelo obtido | 27 |
| Tabela 3 – Valores de pd_x e nd_x em diferentes situações | 29 |
| Tabela 4 – Restrições | 39 |

Sumário

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | Justificativa | 11 |
| 1.2 | Objetivos | 12 |
| 1.3 | Estrutura do Trabalho | 12 |
| 2 | REVISÃO DA LITERATURA | 13 |
| 2.1 | Estado da Arte | 13 |
| 2.1.1 | Modelos Matemáticos | 13 |
| 2.1.2 | Algoritmos Exatos ou de Aproximação | 13 |
| 2.1.3 | Algoritmos Heurísticos | 13 |
| 2.1.4 | Variações do Problema de Carregamento de Contêineres | 14 |
| 2.2 | Fundamentação Teórica | 15 |
| 2.2.1 | Programação Linear Inteira Mista | 15 |
| 2.2.2 | Modelo Base | 17 |
| 3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS | 19 |
| 3.1 | Planejamento Experimental | 19 |
| 4 | RESULTADOS | 20 |
| 4.1 | Modelo Completo | 20 |
| 4.2 | Explicação de Constantes e Variáveis do Modelo | 24 |
| 4.3 | Explicação de Restrições do Modelo | 27 |
| 4.3.1 | Não Sobreposição | 27 |
| 4.3.2 | Orientação | 30 |
| 4.3.3 | Orientação com Altura Fixa | 30 |
| 4.3.4 | Estabilidade | 31 |
| 4.3.5 | Empilhamento | 33 |
| 4.3.6 | Múltiplos Destinos | 36 |
| 4.3.7 | Limite e Distribuição de Peso Dentro do Contêiner | 37 |
| 4.3.8 | Prioridades | 38 |
| 4.3.9 | Carregamento Completo de Grupo de Itens | 38 |
| 4.4 | Divisão de Restrições por Uso | 38 |
| 4.5 | Casos de Uso | 44 |
| 4.5.1 | Caso de Uso 1 | 44 |
| 4.5.1.1 | Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de caixas | 44 |
| 4.5.1.2 | Restrições Básicas e Altura de Caixas Fixa | 45 |
| 4.5.1.3 | Restrições Básicas e Limite de Peso do Contêiner | 46 |
| 4.5.1.4 | Restrições Básicas e Distribuição de Peso no Contêiner | 48 |
| 4.5.1.5 | Restrições Básicas e Carregamento Completo de Grupos de Caixas | 50 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.5.1.6 | Restrições Básicas e Prioridade | 51 |
| 4.5.1.7 | Restrições Básicas e Múltiplos Destinos | 53 |
| 4.5.1.8 | Restrições Básicas e Empilhamento | 54 |
| 4.5.2 | Caso de Uso 2 | 56 |
| 4.5.2.1 | Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de Caixas | 56 |
| 4.5.2.2 | Restrições Básicas e Estabilidade Vertical | 57 |
| 4.5.2.3 | Restrições Básicas e Estabilidades Vertical e Horizontal no Eixo Y | 58 |
| 4.5.2.4 | Restrições Básicas e Estabilidades Vertical e Horizontais nos Eixos X e Y | 59 |
| 4.5.3 | Caso de Uso 3 | 60 |
| 4.5.3.1 | Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de Caixas | 61 |
| 4.5.3.2 | Restrições Básicas, Altura Fixa, Múltiplos Destinos, Empilhamento, Prioridade, Estabilidade Vertical, Carregamento Completo de Grupos de Caixas, Limite e Distribuição de Peso no Contêiner | 62 |
| 5 | CONCLUSÃO | 66 |
| | REFERÊNCIAS | 68 |

1 Introdução

Segundo Ballou (2009), desde épocas antigas da História documentada, muitas mercadorias são feitas em locais distantes de onde são mais consumidas. Dessa forma, as atividades de logística tornaram-se essenciais para o comércio em geral. Para aperfeiçoar essas laborações, é necessário não somente determinar rotas ótimas para o transporte, mas também arranjos para as mercadorias que maximizem o volume transportado no espaço disponível, sendo esse o foco deste trabalho.

Esse tópico é conhecido na literatura de pesquisa operacional como problemas de carregamento de contêineres, os quais, de acordo com Bortfeldt, Wäscher et al. (2012), podem ser interpretados como problemas de atribuição geométricos, em que pequenos paralelepípedos (caixas) devem ser atribuídos a um maior, de forma que os itens menores não se sobreponham e estejam inteiramente dentro dele. O receptáculo é aqui chamado de contêiner. Todavia, na realidade, poderia ser a carroceria de um caminhão baú ou um palete com altura de carregamento máxima por exemplo.

Na prática, apenas as restrições da definição anterior não são suficientes para que um modelo gere resultados satisfatórios para uso. Por conseguinte, outras como estabilidade do carregamento, a resistência das caixas ao empilhamento, arranjos levando em conta múltiplos destinos das caixas, requisitos de carregamento completo de grupos de caixas, limitações de peso total do carregamento e/ou orientação das caixas, devem ser acrescentadas. Este trabalho aborda restrições para orientação, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade e carregamento completo de grupos de caixas, além de limite e distribuição de peso no contêiner, aplicadas a um modelo com posicionamento contínuo contendo apenas restrições de não sobreposição.

1.1 Justificativa

De acordo com Novaes (2004), é a logística que dá condições reais de garantir a posse do produto, por parte do consumidor, no momento desejado. Portanto, garantir a eficiência desse setor beneficiaria produtores e consumidores, dos mais variados itens, com a redução de custo.

Tendo isso em vista e considerando o grande uso de unitização de cargas, encontrar arranjos que maximizem o volume a ser transportado em contêineres, caminhões ou outra forma semelhante, traz grandes benefícios para a logística. Uma vez que carregar o maior volume possível em cada receptáculo diminui o número de viagens necessárias para o transporte.

Mesmo que algoritmos heurísticos produzam resultados com tempos de computação consideravelmente menores, as soluções encontradas na grande maioria das vezes não correspondem à ótima, e existem muitos poucos algoritmos exatos. Portanto, criar modelos eficientes de programação linear com restrições práticas relevantes é de suma importância, visto

que os estudos científicos para inclusão de tais requisitos ainda estão em seus primórdios, de acordo com Bortfeldt, Wäscher et al. (2012).

1.2 Objetivos

Objetivo geral. Aplicar restrições para orientação, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade e carregamento completo de grupos de caixas, além de limite e distribuição de peso no contêiner, a um modelo eficiente de carregamento de contêineres que contém apenas restrições de não sobreposição, mantendo a eficiência se comparado ao apresentado na literatura.

Objetivos específicos. Também, objetivam-se mais especificamente:

1. Realizar um levantamento de modelos previamente propostos que resolvam o problema;
2. Incluir novas restrições em um modelo de posicionamento contínuo;
3. Analisar o crescimento do número de variáveis e restrições do modelo modificado;
4. Comparar resultados para o modelo utilizando-se diferentes restrições práticas.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, ordenados conforme apresentado abaixo:

- O capítulo atual 1 aborda a contextualização do trabalho, o problema abordado, os objetivos e a justificativa para a elaboração;
- As bases teóricas são apresentadas no capítulo 2, que também inclui o estado da arte do problema e o modelo tomado como base;
- O capítulo 3 apresenta os procedimentos adotados para desenvolver o trabalho;
- No capítulo 4 é descrito o modelo obtido e mostrado alguns casos de uso.
- Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões, considerações finais e indicações para trabalhos futuros.

2 Revisão da Literatura

2.1 Estado da Arte

2.1.1 Modelos Matemáticos

O problema de carregamento de contêineres é estudado desde Gilmore e Gomory (1965). Porém, de acordo com Bortfeldt, Wäscher et al. (2012), a abordagem mais antiga deve ser atribuída a Tsai (1987), que forneceu um modelo para o arranjo de caixas de diferentes tamanhos em paletes, restringindo apenas sobreposições. Já Chen, Lee e Shen (1995), além dessas restrições, também incluía a orientação das caixas e múltiplos contêineres em um modelo de programação binário inteiro misto.

Em Padberg (2000) é apresentado um modelo inteiro misto que resolve problemas com até 20 caixas em tempos razoáveis, segundo estimativas do autor. Outros modelos inteiros mistos também são mostrados em Moura e Oliveira (2009) e em Junqueira, Morabito e Yamashita (2012). Este último, além das restrições de sobreposição, também inclui orientação, estabilidade e fragilidade das caixas. Porém, bem como os anteriores, somente é adequado para problemas de tamanho moderado.

2.1.2 Algoritmos Exatos ou de Aproximação

Pela dificuldade da solução, poucos algoritmos exatos existem para o problema. Martello, Pisinger e Vigo (2000) construíram um algoritmo branch-and-bound exato, tratando apenas a sobreposição de caixas. Outro semelhante é mostrado por Hifi (2004). Já em Fekete, Schepers e Veen (2007) é utilizado um algoritmo de busca em árvore que resolveu mais de 70% das instâncias testadas. Algoritmos de aproximação que não geram necessariamente soluções ótimas foram apresentados por Li e Cheng (1992), Jansen e Solis-Oba (2006), Bansal et al. (2007), Miyazawa e Wakabayashi (2009), mas nenhum tratou outras restrições além das de sobreposição e orientação das caixas.

2.1.3 Algoritmos Heurísticos

Dentre as formas de abordagens, algoritmos heurísticos fornecem soluções de qualidade razoável com tempos de processamento aceitáveis. Porém, é difícil dizer se o algoritmo representa o estado da arte pelos déficits nos conjuntos de teste. Dentre os mais recentes tem-se o de Gonçalves e Resende (2012) que trata a orientação e a estabilidade vertical das caixas, o de Allen, Burke e Kendall (2011) que trata somente a orientação, e o de Che et al. (2011) que não inclui requisito prático além da sobreposição de caixas.

2.1.4 Variações do Problema de Carregamento de Contêineres

Junqueira, Morabito e Yamashita (2010) cita Pisinger (2002) dividindo o problema em quatro variantes:

- Problema de Carregamento de Contêineres 2.5D (Strip Packing Problem): o contêiner possui duas dimensões fixas e uma variável que deve ser minimizada, armazenando-se todas as caixas;
- Problema de Carregamento de Contêineres 3D (Knapsack Loading Problem): as três dimensões do contêiner são fixas e deseja-se maximizar o volume de caixas alocadas, ou, de forma equivalente, minimizar o espaço vago no contêiner;
- Problema de Carregamento de Bins (Bin Packing Problem): há vários contêineres iguais e deve-se utilizar o menor número deles possível para armazenar todas as caixas;
- Problema de Carregamento de Múltiplos Contêineres (Multi-Container Loading Problem): possui vários contêineres diferentes, com custos próprios, e busca-se alocar todas as caixas de modo a minimizar o custo associado aos contêineres escolhidos.

Este trabalho visa elaborar um modelo para o Problema de Carregamento de Contêineres 3D de posicionamento contínuo com restrições para tratar orientação, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade e carregamento completo de grupos de caixas, além de limite e distribuição de peso no contêiner. Outras considerações práticas foram apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995) conforme a Tabela 1.

Tabela 1: Restrições práticas apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995)

| Consideração | Descrição |
|--|---|
| Orientação | Orientação de cada caixa dentro do contêiner. Dentre os casos citados por Bortfeldt, Wäscher et al. (2012), destacam-se três: Apenas uma orientação permitida para cada caixa; A orientação vertical da caixa é fixa e a horizontal pode ser rotacionada; As caixas podem ser orientadas de qualquer forma. |
| Empilhamento | Cada caixa possui um limite de força que suporta sobre sua face superior, limitando assim a quantidade de caixas empilhadas sobre ela. |
| Manuseio | Cada caixa, em função de alguma característica, deve ser posicionada em determinados lugares do contêiner, por exemplo: Caixas grandes devem ser posicionadas no fundo; Caixas pesadas não devem ser posicionadas a certa altura; Alguma caixa, por questão de segurança ou facilidade, deve ser posicionada próximo à porta. |
| Estabilidade | Dividida em dois tipos: Estabilidade Vertical e Estabilidade Horizontal, que dizem respeito as caixas terem suas faces inferiores e/ou laterais apoiadas por outras caixas ou pelo contêiner. |
| Agrupamento de itens | As caixas de um mesmo destino (ou tipo) devem ser posicionadas próximas umas das outras. |
| Múltiplos destinos | As caixas devem ser posicionadas de acordo com o destino, considerando a ordem de descarregamento. |
| Separação de itens | Certas caixas não devem ser colocadas em contato dentro do contêiner. |
| Carregamento completo de grupos de itens | Todas as caixas que compõe um grupo, devem ser alocadas em um mesmo carregamento. |
| Prioridades | Cada caixa tem certa prioridade em relação às outras, devendo ter preferência de serem alocadas no contêiner. |
| Complexidade do padrão de empacotamento | Organizar as caixas em padrões de carregamento menos complexos, pode diminuir o esforço de carregamento e descarregamento. |
| Limite de peso | Cada caixa tem um peso associado e o contêiner possui um peso máximo suportado. |
| Distribuição de peso dentro do contêiner | As caixas devem ser alocadas de forma que o centro de gravidade do contêiner fique próximo do centro geométrico do plano da base. |

2.2 Fundamentação Teórica

2.2.1 Programação Linear Inteira Mista

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), a programação linear envolve o planejamento de atividades para obter um resultado que atinja o melhor objetivo entre todas as alternativas viáveis. Em suma, ela resolve o problema genérico de alocar da melhor forma possível recursos limitados para atividades que competem entre si, utilizando para isso um modelo

matemático que o descreva. No caso do problema abordado, uma atividade seria colocar determinada caixa no contêiner e os recursos seriam os espaços dentro dele.

Para representar um modelo da programação linear são utilizados símbolos conforme representados abaixo (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

- Z =valor da medida de desempenho global;
- x_j =nível de atividade j (para j de 1 ao número de atividades);
- c_j =incremento em Z que resultaria de cada incremento unitário no nível de atividade j ;
- b_i =quantidade do recurso i que se encontra disponível para alocação em atividades (para i de 1 ao número de recursos);
- a_{ij} =quantidade do recurso i consumido por unidade de atividade j .

O modelo é formulado de forma a encontrar valores para os níveis de atividade, x_j , denominados variáveis de decisão. Já c_j , b_i e a_{ij} são constantes de entrada, ou seja, parâmetros do modelo. Um modelo padrão pode ser descrito pelas equações abaixo:

Maximizar

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

sujeito às restrições

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (2.2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (2.3)$$

$$\vdots \quad (2.4)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (2.5)$$

e

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0 \quad (2.6)$$

Tem-se acima que n é o número de atividades e m é o número de recursos. A Equação 2.1, que está sendo maximizada, é denominada função objetivo. As Equações 2.2, 2.3 e 2.5 são chamadas restrições funcionais. As Equações 2.6 são restrições de não negatividade.

Contudo, pode haver modificações nesse modelo padrão para muitos problemas, como minimizar ao invés de maximizar, ter restrições de igualdade ou desigualdade do tipo maior ou igual, não ter restrições de não negatividade para algumas variáveis de decisão (serem irrestritas em sinal).

Determinados problemas de otimização linear podem necessitar de modelos matemáticos com restrições adicionais de que variáveis sejam valores inteiros. Eles fazem parte da chamada Programação Linear Inteira (ou Programação Inteira). Outras classificações são a de Programação Inteira Binária, para problemas que possuem variáveis que somente podem assumir valor 0 ou 1, e a de Programação Inteira Mista, para os que tenham variáveis inteiras e não inteiras como o abordado neste trabalho.

2.2.2 Modelo Base

O modelo de Guimarães (2015) tomado como base, em qual serão acrescentadas as restrições, considera um contêiner de comprimento L , largura W e altura H , que deve ser carregado com caixas de comprimento l_i , largura w_i e altura h_i para i variando de 1 ao número de caixas. Cada caixa deve ser posicionada com o vértice inferior frontal esquerdo em uma coordenada (x_i, y_i, z_i) e os lados paralelos aos lados do contêiner. O sistema de coordenada adotado possui a origem no vértice inferior frontal esquerdo do contêiner. Tem-se o modelo:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^n v_i \cdot d_i \quad (2.7)$$

sujeito às restrições

$$x_i - x_j + M \cdot b_{ij1} \leq -l_i + M \quad (2.8)$$

$$x_j - x_i + M \cdot b_{ij2} \leq -l_j + M \quad (2.9)$$

$$y_i - y_j + M \cdot b_{ij3} \leq -w_i + M \quad (2.10)$$

$$y_j - y_i + M \cdot b_{ij4} \leq -w_j + M \quad (2.11)$$

$$z_i - z_j + M \cdot b_{ij5} \leq -h_i + M \quad (2.12)$$

$$z_j - z_i + M \cdot b_{ij6} \leq -h_j + M \quad (2.13)$$

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + b_{ij4} + b_{ij5} + b_{ij6} - c_{ij} = 0 \quad (2.14)$$

$$d_i + d_j \leq c_{ij} + 1 \quad (2.15)$$

$$x_i + l_i \leq L + (1 - d_i) \cdot M \quad (2.16)$$

$$y_i + w_i \leq W + (1 - d_i) \cdot M \quad (2.17)$$

$$z_i + h_i \leq H + (1 - d_i) \cdot M \quad (2.18)$$

e

$$c_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{Para } i \neq j \quad (2.19)$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad d_i \in \{0,1\} \quad (2.20)$$

Considera-se que i e j variam de 1 ao número de caixas, M é uma constante de valor muito alto e v_i é o volume da caixa i . A função objetivo 2.7 visa maximizar o volume de caixas

armazenadas no contêiner, as restrições de 2.8 a 2.15 dizem respeito a não sobreposição de caixas e 2.16, 2.17 e 2.18 confinam cada caixa alocada totalmente dentro do contêiner. Quanto às variáveis, são indicados o seguinte (GUIMARÃES, 2015):

- d_i : Binária, indica se a caixa i deve ou não ser inserida no contêiner;
- b_{ij1} : Binária, indica se a caixa i está antes de j em relação ao eixo X;
- b_{ij2} : Binária, indica se a caixa i está depois de j em relação ao eixo X;
- b_{ij3} : Binária, indica se a caixa i está antes de j em relação ao eixo Y;
- b_{ij4} : Binária, indica se a caixa i está depois de j em relação ao eixo Y;
- b_{ij5} : Binária, indica se a caixa i está antes de j em relação ao eixo Z;
- b_{ij6} : Binária, indica se a caixa i está depois de j em relação ao eixo Z;
- c_{ij} : Inteira, assume valores de 0 à 3 indicando:
 - 0: As caixas i e j estão sobrepostas em todos os eixos e pelo menos uma delas terá de ser retirada;
 - 1: As caixas i e j estão sobrepostas com relação a dois eixos, porém ambas poderão ser posicionadas;
 - 2: As caixas i e j estão sobrepostas com relação a um eixo, porém ambas poderão ser posicionadas;
 - 3: As caixas i e j estão sobrepostas em relação a nenhum eixo e ambas serão posicionadas.

3 Procedimentos metodológicos

Para atingir os objetivos propostos, foram obedecidos os seguintes passos:

1. Realizar pesquisa bibliográfica para conhecimento do assunto, do estado da arte do problema, e de modelos que contenham as restrições desejadas propostos na literatura;
2. Adicionar restrições para tratar orientação, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade e carregamento completo de grupos de caixas, além de limite e distribuição de peso no contêiner, ao modelo base;
3. Validar o novo modelo por meio de testes variados com as restrições práticas citadas, de forma individual e juntas no mesmo modelo, utilizando o solucionador Gurobi Optimization (2015);
4. Contabilizar o número de variáveis e de restrições do novo modelo obtido para diferentes conjuntos de restrições práticas.

3.1 Planejamento Experimental

Foram realizados testes variados em número de caixas, em quantidade de tipos de caixas e em dimensões do contêiner e das caixas, utilizando-se o solucionador Gurobi Optimization (2015) em um computador Intel Core i5-3210M.

Cada teste foi aplicado para o modelo apenas com restrições de não sobreposição e orientação, para o modelo com essas e mais uma restrição prática (sendo feito para cada uma das outras) e para o modelo com várias combinações de restrições práticas sempre incluindo as de não sobreposição e orientação.

Para uma melhor visualização, as soluções encontradas foram representadas em gráficos. Alguns exemplos de casos de uso podem ser vistos na seção 4.5 que mostra os dados utilizados e as respostas obtidas. Para todos eles, as dimensões de caixas e contêineres, bem como os valores das constantes necessárias, foram escolhidas de forma que houvesse mudança perceptível na solução encontrada ao se utilizar as diferentes restrições práticas, em comparação ao mesmo teste sem tais restrições.

4 Resultados

4.1 Modelo Completo

O modelo desenvolvido conservou a forma de representação do problema usada no modelo base, apresentado na subseção 2.2.2, que possui as seguintes considerações:

- A origem do sistema de coordenadas é o vértice inferior frontal esquerdo do contêiner.
- O posicionamento de uma caixa i é definido pelas variáveis reais x_i , y_i e z_i , que correspondem as coordenadas do vértice mais próximo da origem da caixa i .
- O contêiner e as caixas devem ser paralelepípedos e devem possuir um tamanho definido para cada dimensão.
- As caixas podem ser colocadas somente de forma ortogonal.

A forma de verificar a não sobreposição de caixas foi alterada, conforme explicado na subseção 4.3.1, mas a ideia por trás das variáveis pd (pd_x , pd_y , pd_z) é a mesma das variáveis b do modelo base. Ambas são binárias e o valor depende da comparação entre o menor valor de coordenada de uma caixa em determinado eixo e o maior valor de coordenada de uma outra caixa neste mesmo eixo. A diferença está no fato de que quando $pd_{x_{ji}}$ é colocado com valor 1, b_{ij1} seria colocado como 0, quando $pd_{x_{ij}}$ é colocado com valor 1, b_{ij2} seria colocado como 0, e assim sucessivamente com pd_y , pd_z e b_{ij3} , b_{ij4} , b_{ij5} , b_{ij6} .

A função objetivo continuou a mesma, bem como as variáveis d que continuam sendo usadas da mesma forma.

As restrições práticas foram feitas considerando que seriam utilizadas sempre em conjunto com as restrições de não sobreposição e de orientação das caixas, de forma que essas são as restrições básicas para este modelo. Após adicionar-se todas as restrições práticas almeçadas (conforme seção 1.2) foi obtido o seguinte modelo:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^n v_i \cdot d_i \quad (4.1)$$

sujeito às restrições

$$lx_i + ly_i + lz_i = 1 \quad (4.2)$$

$$wx_i + wy_i + wz_i = 1 \quad (4.3)$$

$$hx_i + hy_i + hz_i = 1 \quad (4.4)$$

$$lx_i + wx_i + hx_i = 1 \quad (4.5)$$

$$ly_i + wy_i + hy_i = 1 \quad (4.6)$$

$$lz_i + wz_i + hz_i = 1 \quad (4.7)$$

$$x_i + l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i \leq L + (1 - d_i) \cdot M \quad (4.8)$$

$$y_i + l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i \leq W + (1 - d_i) \cdot M \quad (4.9)$$

$$z_i + l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i \leq H + (1 - d_i) \cdot M \quad (4.10)$$

$$x_j - x_i + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j \leq M \cdot pdx_{ij} \quad (4.11)$$

$$y_j - y_i + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j \leq M \cdot pdy_{ij} \quad (4.12)$$

$$z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \leq M \cdot pdz_{ij} \quad (4.13)$$

$$pdx_{ij} + pdx_{ji} + pdy_{ij} + pdy_{ji} + pdz_{ij} + pdz_{ji} + d_i + d_j \leq 7 \quad (4.14)$$

$$x_j - x_i + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j \geq -M \cdot ndx_{ij} \quad (4.15)$$

$$y_j - y_i + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j \geq -M \cdot ndy_{ij} \quad (4.16)$$

$$z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \geq -M \cdot ndz_{ij} \quad (4.17)$$

$$hz_i \geq af_i \quad (4.18)$$

$$x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) + M \cdot (xcme_{ij}) \leq x_j + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j + M \quad (4.19)$$

$$x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) + M \geq x_j + M \cdot (xcma_{ij}) \quad (4.20)$$

$$y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) + M \cdot (ycme_{ij}) \leq y_j + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j + M \quad (4.21)$$

$$y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) + M \geq y_j + M \cdot (ycma_{ij}) \quad (4.22)$$

$$z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) + M \cdot (zcm_{ij}) \leq z_j + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j + M \quad (4.23)$$

$$z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) + M \geq z_j + M \cdot (zcm_{ij}) \quad (4.24)$$

$$M \cdot pdz_{ij} + M \cdot ndz_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apz_{ij}) \quad (4.25)$$

$$- M \cdot pdz_{ij} - M \cdot ndz_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apz_{ij}) \quad (4.26)$$

$$M \cdot pdy_{ij} + M \cdot ndy_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcm_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apy_{ij}) \quad (4.27)$$

$$- M \cdot pdy_{ij} - M \cdot ndy_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcm_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apy_{ij}) \quad (4.28)$$

$$M \cdot pdx_{ij} + M \cdot ndx_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcm_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apx_{ij}) \quad (4.29)$$

$$- M \cdot pdx_{ij} - M \cdot ndx_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcm_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apx_{ij}) \quad (4.30)$$

$$M \cdot pdy_{ji} + M \cdot ndy_{ji} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcm_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apy_{ij}) \quad (4.31)$$

$$-M \cdot pdy_{ji} - M \cdot ndy_{ji} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apyf_{ij}) \quad (4.32)$$

$$M \cdot pdx_{ji} + M \cdot ndx_{ji} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apxf_{ij}) \quad (4.33)$$

$$-M \cdot pdx_{ji} - M \cdot ndx_{ji} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apxf_{ij}) \quad (4.34)$$

$$x_i \leq M \cdot (1 - ecx_i) \quad (4.35)$$

$$y_i \leq M \cdot (1 - ecy_i) \quad (4.36)$$

$$z_i \leq M \cdot (1 - ecz_i) \quad (4.37)$$

$$x_i + l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i \geq L - M \cdot (1 - ecx_f_i) \quad (4.38)$$

$$y_i + l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i \geq L - M \cdot (1 - ecy_f_i) \quad (4.39)$$

$$\sum_{j=1}^n (apx_{ij}) \geq 1 - ecx_i \quad (4.40)$$

$$\sum_{j=1}^n (apy_{ij}) \geq 1 - ecy_i \quad (4.41)$$

$$\sum_{j=1}^n (apz_{ij}) \geq 1 - ecz_i \quad (4.42)$$

$$\sum_{j=1}^n (apxf_{ij}) \geq 1 - ecx_f_i \quad (4.43)$$

$$\sum_{j=1}^n (apyf_{ij}) \geq 1 - ecy_f_i \quad (4.44)$$

$$z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \geq (1/M) - M \cdot (1 - pdz_{ij}) \quad (4.45)$$

$$x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - (x_j + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j) \geq -M \cdot (xcme_{ij}) \quad (4.46)$$

$$x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - x_j \leq M \cdot (xcma_{ij}) \quad (4.47)$$

$$y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - (y_j + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j) \geq -M \cdot (ycme_{ij}) \quad (4.48)$$

$$y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - y_j \leq M \cdot (ycma_{ij}) \quad (4.49)$$

$$-7 + pdz_{ij} + xcme_{ji} + xcma_{ji} + ycme_{ji} + ycma_{ji} + d_i + d_j - pdz_{ji} \leq s_{ij} - 1 \quad (4.50)$$

$$\sum_{j=1}^n (p_j \cdot s_{ij}) \leq ps_i \quad (4.51)$$

$$M \cdot |g_i - g_j| + d_i - d_j \geq 0 \quad (4.52)$$

$$-M \cdot |g_i - g_j| + d_i - d_j \leq 0 \quad (4.53)$$

$$(pr_i - pr_j) \cdot d_i + (pr_j - pr_i) \cdot d_j \geq 0 \quad (4.54)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i) \leq PS \quad (4.55)$$

$$xc_i \leq x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) + M \cdot (1 - di) \quad (4.56)$$

$$xc_i \geq x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - M \cdot (1 - di) \quad (4.57)$$

$$xc_i \leq M \cdot di \quad (4.58)$$

$$xc_i \geq -M \cdot di \quad (4.59)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot xc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot XC_{max}) \quad (4.60)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot xc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot XC_{min}) \quad (4.61)$$

$$yc_i \leq y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) + M \cdot (1 - di) \quad (4.62)$$

$$yc_i \geq y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - M \cdot (1 - di) \quad (4.63)$$

$$yc_i \leq M \cdot di \quad (4.64)$$

$$yc_i \geq -M \cdot di \quad (4.65)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot yc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot YC_{max}) \quad (4.66)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot yc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot YC_{min}) \quad (4.67)$$

$$zc_i \leq z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) + M \cdot (1 - di) \quad (4.68)$$

$$zc_i \geq z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) - M \cdot (1 - di) \quad (4.69)$$

$$zc_i \leq M \cdot di \quad (4.70)$$

$$zc_i \geq -M \cdot di \quad (4.71)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot zc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot ZC_{max}) \quad (4.72)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot zc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot ZC_{min}) \quad (4.73)$$

$$6 + |1,1^{(or_i - or_j)} - 1| - d_i - d_j - pdx_{ij} - pdy_{ij} - pdy_{ji} - pdz_{ij} \\ - (|1,1^{(or_i - or_j)} - 1|) \cdot pdz_{ji} + (1,1^{(or_i - or_j)} - 1) + (1,1^{(or_i - or_j)} - 1) \cdot s_{ij} \geq 0 \quad (4.74)$$

e

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0$$

$$xc_i \geq 0, \quad yc_i \geq 0, \quad zc_i \geq 0$$

$$lx_i \in \{0,1\}, \quad ly_i \in \{0,1\}, \quad lz_i \in \{0,1\}$$

$$wx_i \in \{0,1\}, \quad wy_i \in \{0,1\}, \quad wz_i \in \{0,1\}$$

$$hx_i \in \{0,1\}, \quad hy_i \in \{0,1\}, \quad hz_i \in \{0,1\}$$

$$pdx_{ij} \in \{0,1\}, \quad pdy_{ij} \in \{0,1\}, \quad pdz_{ij} \in \{0,1\}$$

$$ndx_{ij} \in \{0,1\}, \quad ndy_{ij} \in \{0,1\}, \quad ndz_{ij} \in \{0,1\}$$

$$apx_{ij} \in \{0,1\}, \quad apy_{ij} \in \{0,1\}, \quad apz_{ij} \in \{0,1\}$$

$$apxf_{ij} \in \{0,1\}, \quad apyf_{ij} \in \{0,1\}$$

$$xcme_{ij} \in \{0,1\}, \quad ycme_{ij} \in \{0,1\}, \quad zcme_{ij} \in \{0,1\}$$

$$xcma_{ij} \in \{0,1\}, \quad ycma_{ij} \in \{0,1\}, \quad zcma_{ij} \in \{0,1\}$$

$$\begin{aligned}
ecx_{f_{ij}} &\in \{0,1\}, & ecyf_{ij} &\in \{0,1\} \\
ecx_i &\in \{0,1\}, & ecy_i &\in \{0,1\}, & ecz_i &\in \{0,1\} \\
ecx_{f_i} &\in \{0,1\}, & ecyf_i &\in \{0,1\} \\
s_{ij} &\in \{0,1\}, & d_i &\in \{0,1\}
\end{aligned}$$

4.2 Explicação de Constantes e Variáveis do Modelo

Abaixo são listadas as constantes utilizadas no modelo completo (seção 4.1) seguidas de uma breve explicação sobre seu uso:

- n : Quantidade de caixas;
- v_i : Volume da caixa i ;
- M : Constante positiva de valor muito alto;
- L : Tamanho do contêiner no eixo X;
- W : Tamanho do contêiner no eixo Y;
- H : Tamanho do contêiner no eixo Z;
- l_i : Comprimento da caixa i ;
- w_i : Largura da caixa i ;
- h_i : Altura da caixa i ;
- af_i : 1 para fixar a altura da caixa i , 0 para permitir colocar outro lado paralelo ao eixo Z.
- p_i : Peso da caixa i ;
- ps_i : Peso máximo que a caixa i pode suportar;
- g_i : Grupo da caixa i ;
- pr_i : Prioridade da caixa i (quanto maior, mais prioritária);
- PS : Peso máximo que o contêiner pode suportar;
- XC_{max} : Valor máximo de coordenada no eixo X para o centro de massa do contêiner;
- XC_{min} : Valor mínimo de coordenada no eixo X para o centro de massa do contêiner;
- YC_{max} : Valor máximo de coordenada no eixo Y para o centro de massa do contêiner;
- YC_{min} : Valor mínimo de coordenada no eixo Y para o centro de massa do contêiner;
- ZC_{max} : Valor máximo de coordenada no eixo Z para o centro de massa do contêiner;

- ZC_{min} : Valor mínimo de coordenada no eixo Z para o centro de massa do contêiner;
- or_i : Ordem de descarregamento da caixa i (quanto maior, mais tardiamente será descarregada);

A seguir, tem-se uma lista das variáveis utilizadas no modelo completo (seção 4.1) seguidas de uma breve explicação sobre seu uso:

- d_i : Binária, indica se a caixa i deve ou não ser alocada dentro do contêiner (1 caso sim);
- x_i : Real, é o valor da coordenada no eixo X da caixa i mais próximo a origem;
- y_i : Real, é o valor da coordenada no eixo Y da caixa i mais próximo a origem;
- z_i : Real, é o valor da coordenada no eixo Z da caixa i mais próximo a origem;
- lx_i : Binária, indica se o lado dado como comprimento da caixa i (l_i) ficará paralelo ao eixo X (1 caso sim);
- ly_i : Binária, indica se o lado dado como comprimento da caixa i (l_i) ficará paralelo ao eixo Y (1 caso sim);
- lz_i : Binária, indica se o lado dado como comprimento da caixa i (l_i) ficará paralelo ao eixo Z (1 caso sim);
- wx_i : Binária, indica se o lado dado como largura da caixa i (w_i) ficará paralelo ao eixo X (1 caso sim);
- wy_i : Binária, indica se o lado dado como largura da caixa i (w_i) ficará paralelo ao eixo Y (1 caso sim);
- wz_i : Binária, indica se o lado dado como largura da caixa i (w_i) ficará paralelo ao eixo Z (1 caso sim);
- hx_i : Binária, indica se o lado dado como altura da caixa i (h_i) ficará paralelo ao eixo X (1 caso sim);
- hy_i : Binária, indica se o lado dado como altura da caixa i (h_i) ficará paralelo ao eixo Y (1 caso sim);
- hz_i : Binária, indica se o lado dado como altura da caixa i (h_i) ficará paralelo ao eixo Z (1 caso sim);
- pdx_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo X da caixa j e o valor de x da caixa i é maior que zero;
- pdy_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo Y da caixa j e o valor de y da caixa i é maior que zero;
- pdz_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo Z da caixa j e o valor de z da caixa i é maior que zero;

- ndx_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo X da caixa j e o valor de x da caixa i é menor que zero;
- ndy_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo Y da caixa j e o valor de y da caixa i é menor que zero;
- ndz_{ij} : Binária, indica se a diferença entre a coordenada do lado com maior valor para o eixo Z da caixa j e o valor de z da caixa i é menor que zero;
- xcm_{ij} : Binária, indica se x do centro de massa da caixa i é menor que x_f da caixa j ;
- ycm_{ij} : Binária, indica se y do centro de massa da caixa i é menor que y_f da caixa j ;
- zcm_{ij} : Binária, indica se z do centro de massa da caixa i é menor que z_f da caixa j ;
- xcm_{ij} : Binária, indica se x do centro de massa da caixa i é maior que x da caixa j ;
- ycm_{ij} : Binária, indica se y do centro de massa da caixa i é maior que y da caixa j ;
- zcm_{ij} : Binária, indica se z do centro de massa da caixa i é maior que z da caixa j ;
- apx_{ij} : Binária, indica se a caixa i está apoiada na j no sentido do eixo x negativo;
- apy_{ij} : Binária, indica se a caixa i está apoiada na j no sentido do eixo y negativo;
- apz_{ij} : Binária, indica se a caixa i está apoiada na j no sentido do eixo z negativo;
- $apxf_{ij}$: Binária, indica se a caixa i está apoiada na j no sentido do eixo x positivo;
- $apyf_{ij}$: Binária, indica se a caixa i está apoiada na j no sentido do eixo y positivo;
- ecx_i : Binária, indica se a caixa i está apoiada no contêiner no sentido do eixo x negativo;
- ecy_i : Binária, indica se a caixa i está apoiada no contêiner no sentido do eixo y negativo;
- ecz_i : Binária, indica se a caixa i está apoiada no contêiner no sentido do eixo z negativo;
- ecx_f_i : Binária, indica se a caixa i está apoiada no contêiner no sentido do eixo x positivo;
- ecy_f_i : Binária, indica se a caixa i está apoiada no contêiner no sentido do eixo y positivo;
- xc_i : Real, contém o valor da coordenada x do centro de massa da caixa i . Se a caixa não for colocada no contêiner terá o valor 0;
- yc_i : Real, contém o valor da coordenada y do centro de massa da caixa i . Se a caixa não for colocada no contêiner terá o valor 0;
- zc_i : Real, contém o valor da coordenada z do centro de massa da caixa i . Se a caixa não for colocada no contêiner terá o valor 0;
- s_{ij} : Binária, indica se a caixa i está suportando o peso da caixa j .

A Tabela 2 apresenta a quantidade das variáveis citadas anteriormente. As quantidades indicadas são para cada variável listada, sendo n o número de caixas.

Tabela 2: Quantidade de cada variável do modelo obtido

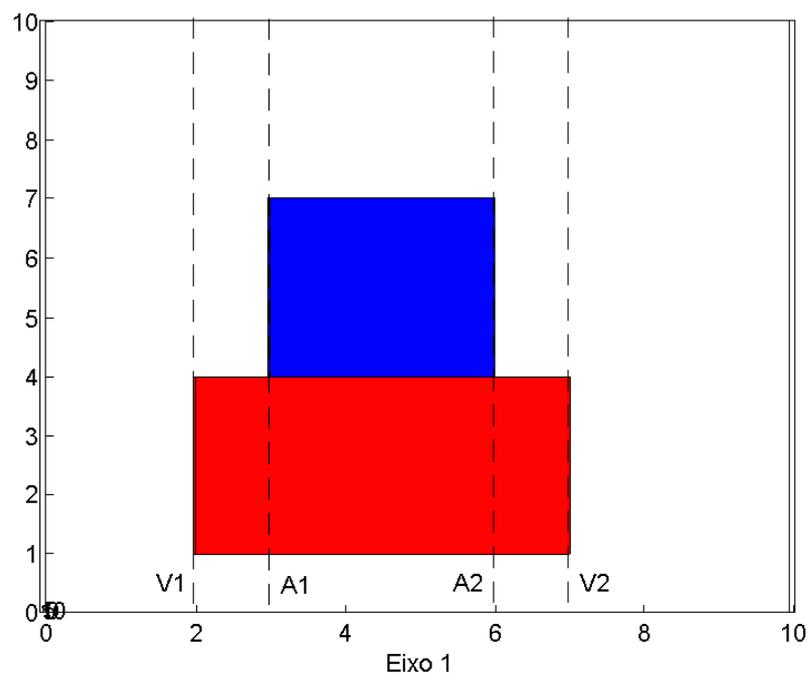
| Variáveis | Qtd. |
|--|---------------|
| $d, x, y, z, lx, ly, lz, wx, wy, wz, hx, hy, hz, ecx, ecy, ecz, ecx f, ecy f, xc, yc, zc$ | n |
| $pdx, pdy, pdz, ndx, ndy, ndz, apx, apy, apz, apx f, apy f, xcme, ycme, zcme, xcma, ycma, zcma, s$ | $n * (n - 1)$ |

4.3 Explicação de Restrições do Modelo

4.3.1 Não Sobreposição

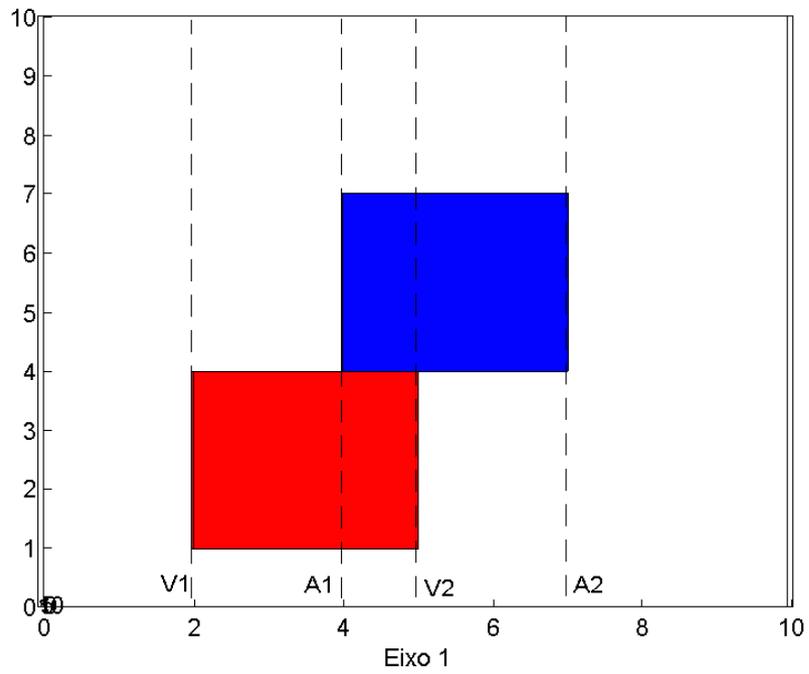
A forma de tratar a não sobreposição de caixas foi alterada em relação ao modelo base descrito na subseção 2.2.2. Pois viu-se que as variáveis pdx , pdy e pdz (que também são utilizadas em outras restrições práticas) poderiam ser usadas para tal finalidade, o que diminuiria o número de restrições e variáveis já que as variáveis b e c não seriam mais necessárias.

Figura 1: Exemplo 1 de caixas compartilhando vários valores de coordenadas de determinado eixo



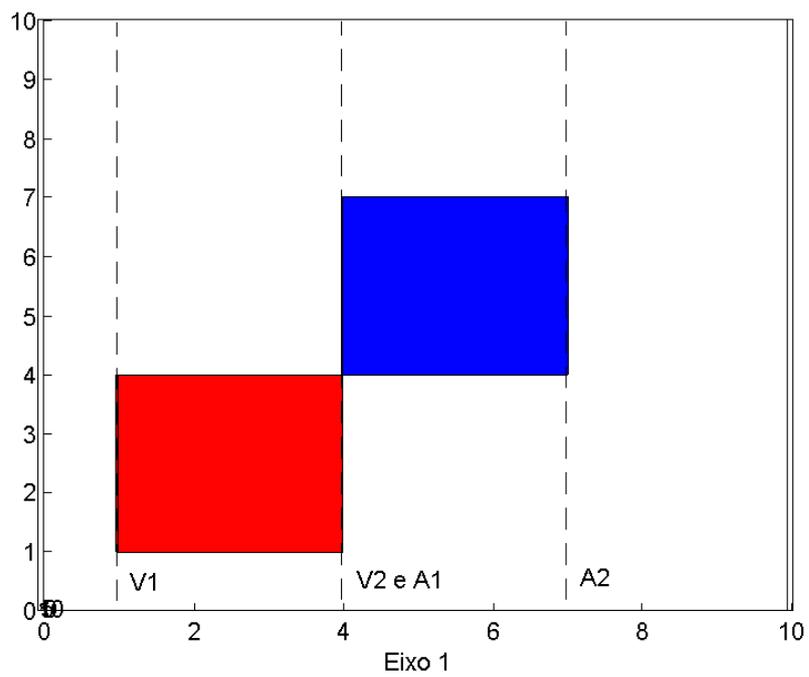
Fonte: autoria própria

Figura 2: Exemplo 2 de caixas compartilhando vários valores de coordenadas de determinado eixo



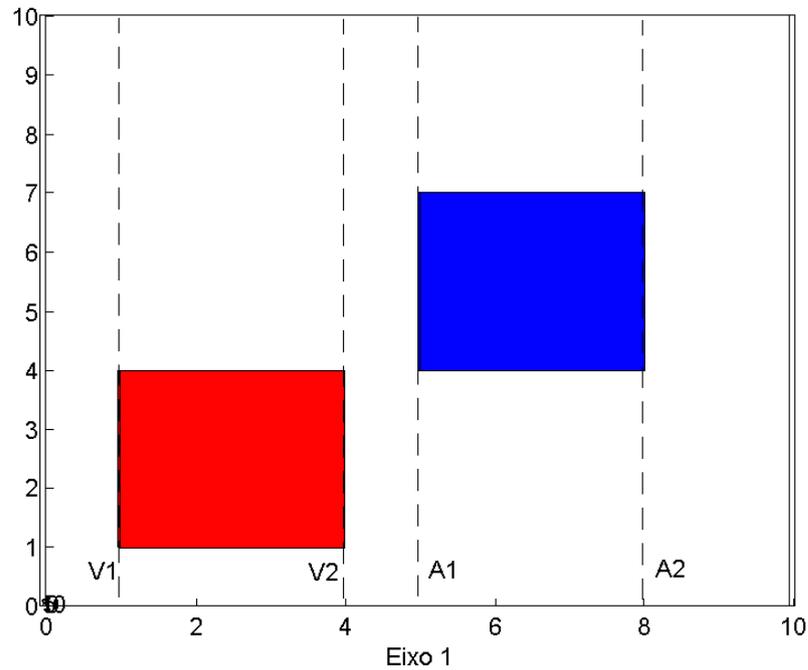
Fonte: autoria própria

Figura 3: Exemplo de caixas compartilhando 1 valor de coordenada de determinado eixo



Fonte: autoria própria

Figura 4: Exemplo de caixas não compartilhando valor de coordenada de determinado eixo



Fonte: autoria própria

Nas Figuras 1, 2, 3, 4, que mostram exemplos de posicionamento de duas caixas, se o Eixo 1 for considerado como sendo o eixo X, o quadrado vermelho como uma caixa i e o quadrado azul como uma caixa j , ambas no contêiner, temos que: $V1$ seria x_i , $A1$ seria x_j , $V2$ seria $x_i + l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i$, $A2$ seria $x_j + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j$. Com isso em vista, a Tabela 3 indica os valores para pdx_{ij} , pdx_{ji} , ndx_{ij} e ndx_{ji} em cada situação representada pelas imagens.

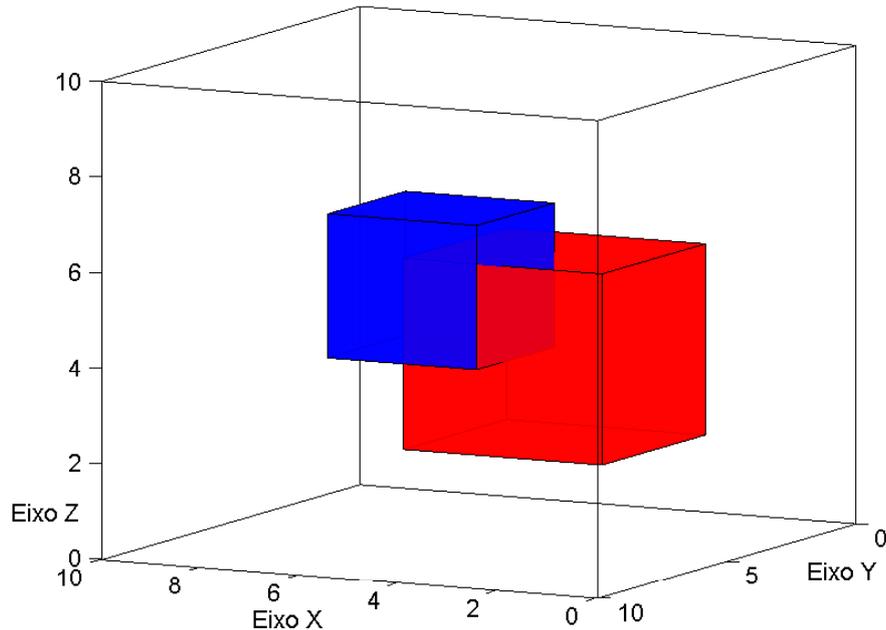
Tabela 3: Valores de pdx e ndx em diferentes situações

| Imagem | pdx_{ij} | pdx_{ji} | ndx_{ij} | ndx_{ji} |
|--------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Pela Tabela 3, pode-se perceber que, quando duas caixas compartilham mais de um valor de coordenadas no eixo X, pdx_{ij} e pdx_{ji} terão valores iguais a 1. De forma semelhante, isso também ocorre para os outros eixos com pdy e pdz . Se acontecer tal situação nos 3 eixos (X, Y, Z), as duas caixas estariam se sobrepondo, não sendo possível armazená-las dessa forma no contêiner. Para evitar a sobreposição, foi colocada a Restrição (4.14) que impede que pdx_{ij} , pdx_{ji} , pdy_{ij} , pdy_{ji} , pdz_{ij} , pdz_{ji} , d_i e d_j sejam simultaneamente iguais a 1. Portanto, ou algum d terá de ser 0 (uma das caixas ser colocada fora do contêiner) ou algum pd deverá ser 0 (não compartilharem mais de uma coordenada de determinado eixo). A Figura 5 mostra

um exemplo de caixas se sobrepondo.

Figura 5: Exemplo de caixas se sobrepondo



Fonte: autoria própria

Para impedir que caixas transponham as paredes do contêiner, foram utilizadas as Restrições (4.8), (4.9) e (4.10) que confinam cada caixa alocada (se d igual a 1) totalmente dentro do contêiner. Ou seja, para cada caixa os lados com coordenadas de maior valor em cada eixo (X, Y e Z) não podem estar além das dimensões respectivas do contêiner (L , W e H).

4.3.2 Orientação

As Restrições (4.2), (4.3) e (4.4) restringem que cada lado da caixa será relacionado a apenas um eixo; As Restrições (4.5), (4.6) e (4.7) restringem que cada eixo será relacionado a somente um lado de cada caixa. Assim, as variáveis binárias lx , wx , hx , ly , ..., hz indicarão qual lado da caixa (comprimento, largura ou altura) ficou paralelo a qual eixo. O valor do lado paralelo ao eixo X de uma caixa i , por exemplo, é obtido como $l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i$. De forma semelhante pode-se obter os valores dos lados paralelos ao eixo Y e eixo Z com $l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i$ e $l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i$.

4.3.3 Orientação com Altura Fixa

Para se fixar a altura de uma caixa, ou seja, manter o lado fornecido como altura paralelo ao eixo Z, foi definida a Restrição (4.18) e a constante af para cada caixa. Se af_i for igual a 1, a variável hz_i (explicada em 4.2) deverá ser igual a 1 também para que a inequação

seja verdadeira. Já se af_i for igual a 0, hz_i poderá ser tanto 1 quanto 0 que a inequação continuará verdadeira, não interferindo no resultado.

4.3.4 Estabilidade

Para garantir a estabilidade vertical e horizontal das caixas, assim como no empilhamento (subseção 4.3.5), foi utilizado o centro de massa das mesmas, de modo que, se o centro, da face inferior e laterais, de determinada caixa estiver apoiado no contêiner ou em outra caixa, ela está estável. Mack, Bortfeldt e Gehring (2004 apud BORTFELDT; WÄSCHER et al., 2012) destacam que em alguns casos essa forma não é adequada, pois o centro de massa pode estar sendo apoiado por uma caixa mas não estar sendo apoiado, indiretamente, pelo chão do contêiner (como a caixa amarela na Figura 9). Porém, para simplificar o problema e evitar restrições quadráticas optou-se por essa solução que também é utilizada por Lin, Chang e Yang (2006).

A estabilidade foi dividida por eixo e por sentido. Há restrições próprias para a estabilidade no sentido negativo dos eixos X, Y e Z e no sentido positivo dos eixos X e Y. A estabilidade vertical é definida pelo sentido negativo do eixo Z, os outros eixos definem a estabilidade horizontal.

As Restrições (4.19) a (4.24) verificam se o centro de uma caixa i está entre as extremidades de uma caixa j para cada eixo, se estiver, $xcme_{ij}$ e xcm_{ij} (para o eixo X), $ycme_{ij}$ e ycm_{ij} (para o eixo Y), $zcme_{ij}$ e zcm_{ij} (para o eixo Z) ficarão iguais a 1. As variáveis pdx_{ij} e ndx_{ij} quando forem ambas iguais a 0, indicam que a caixa i estará logo após a caixa j com distância igual a 0 em relação ao eixo X (conforme Tabela 3). O mesmo é válido para pdy_{ij} , ndy_{ij} em relação ao eixo Y e pdz_{ij} , ndz_{ij} em relação ao eixo Z. As variáveis citadas nesse parágrafo são utilizadas nas Restrições (4.25) a (4.34) para detectar se uma caixa está apoiada em outra em relação a cada sentido dos eixos X, Y e Z.

Para que uma caixa i esteja apoiada em uma j verticalmente, há duas condições. A primeira é que, em relação ao eixo Z, a distância entre elas seja 0 e a i esteja logo após a j . A segunda é que o centro da i deve estar entre as extremidades da caixa j em relação aos eixos X e Y. Nesse caso a variável apz_{ij} será igual a 1.

Já para uma caixa i estar apoiada em uma j no sentido negativo do eixo X (apx_{ij} será igual a 1), a distância entre elas deve ser 0 e a i deve estar logo após a j em relação ao eixo X. Além de que o centro da i deve estar entre as extremidades da caixa j em relação aos eixos Y e Z. Para i estar apoiada em j no sentido positivo do eixo X ($apxf_{ij}$ será igual a 1), j é que deve estar logo após ela em relação ao eixo X.

Agora para uma caixa i estar apoiada em uma j no sentido negativo do eixo Y (apy_{ij} será igual a 1), a distância entre elas deve ser 0 e a i deve estar logo após a j em relação ao eixo Y. Além de que o centro da i deve estar entre as extremidades da caixa j em relação aos eixos X e Z. Para i estar apoiada em j no sentido positivo do eixo Y ($apyf_{ij}$ será igual a 1), j é que deve estar logo após ela em relação ao eixo Y.

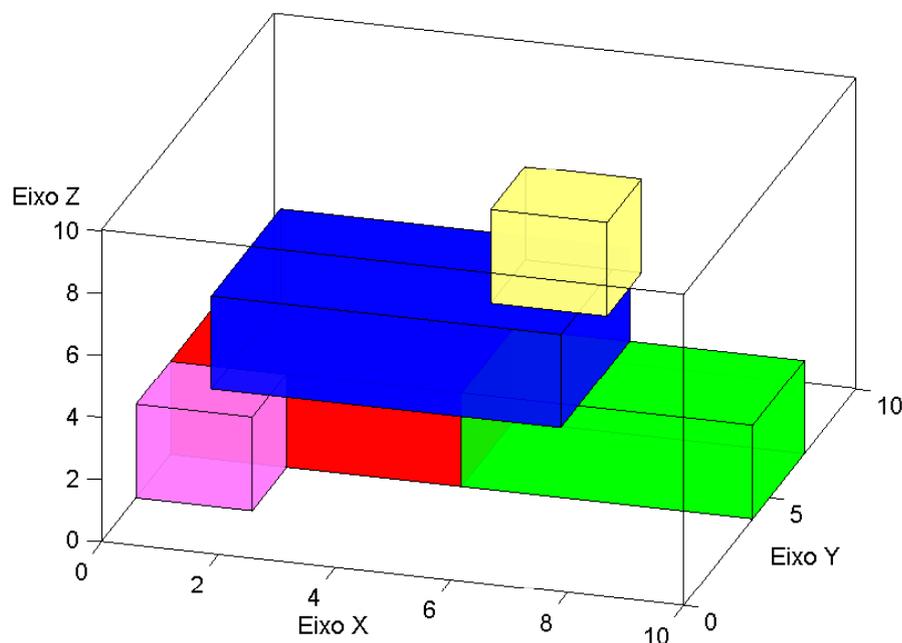
Quanto às variáveis ecx_i , ecx_f_i , ecy_i , ecy_f_i e ecz_i , elas são iguais a 1 quando a caixa i

está apoiada no contêiner nos sentidos negativo do eixo X, positivo do eixo X, negativo do eixo Y, positivo do eixo Y e negativo do eixo Z respectivamente. Isso é garantido pelas Restrições (4.35) a (4.39).

Finalmente, as Restrições (4.40) a (4.44) garantem que em cada sentido cada caixa será apoiada por pelo menos uma caixa ou pelo contêiner.

Para ilustrar, no exemplo da Figura 6, todas as caixas estão estáveis verticalmente (sentido negativo de Z). As caixas vermelha e verde estão estáveis tanto no sentido positivo quanto negativo de X, e a caixa rosa está estável no sentido negativo de X e positivo de Y. A caixa vermelha não está estável em Y, pois o centro dela não está apoiado pela caixa rosa.

Figura 6: Exemplo de caixas com estabilidade vertical

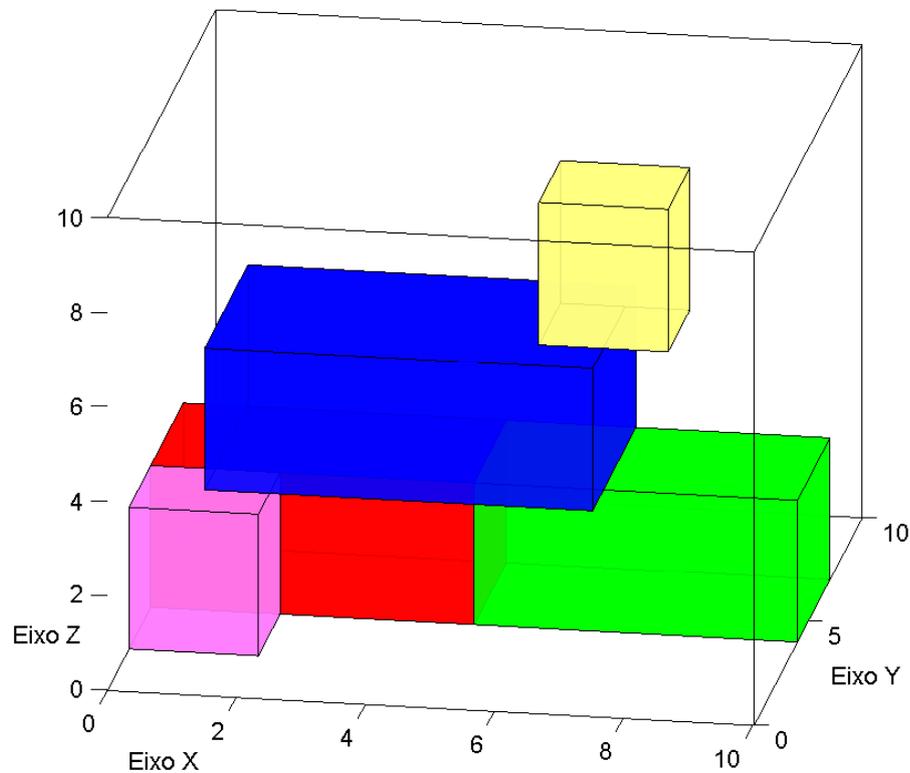


Fonte: autoria própria

Uma alternativa para melhorar a estabilidade é utilizar mais pontos além do centro da caixa. Porém, para cada ponto adicional, é necessário outras variáveis semelhantes a $xcme$, $xcma$, $ycme$, $ycma$, $zcme$, $zcma$, apx , apy , apz , $apxf$ e $apyf$ próprias para eles, bem como outras restrições como as citadas nos parágrafos anteriores.

A caixa amarela na Figura 7 não está estável verticalmente, pois o centro da face inferior dela não está dentro da área da face superior da caixa azul. Por ser adotada tal condição, o modelo considera que as caixas estejam apoiadas diretamente por somente uma outra em cada sentido. Isso também é adotado no tratamento das restrições de Empilhamento (subseção 4.3.5).

Figura 7: Exemplo de estabilidade vertical inválida



Fonte: autoria própria

4.3.5 Empilhamento

Toda caixa possui um peso máximo que consegue suportar em sua face superior. Em Junqueira, Morabito e Yamashita (2010) é considerado que a pressão exercida por uma caixa é uniformemente distribuída por sua face inferior. Assim, se somente parte da caixa está acima de uma outra caixa, apenas uma parte proporcional do peso será considerado como suportado pela segunda caixa. Porém, neste trabalho, os objetos não são discretizados, conseqüentemente, calcular a área de determinada caixa que está sobre uma outra certa caixa levaria a restrições quadráticas. Portanto, adotou-se que o peso das caixas seria exercido pelo centro de massa (o centro geométrico dela, considerando uma massa uniformemente distribuída em seu interior). Com isso, se o centro de massa de determinada caixa estivesse acima (não apenas imediatamente acima) de outra certa caixa, a segunda caixa está suportando o peso da primeira (indicado pela variável binária s_{ij}). Assim, a Restrição (4.51) garante que o somatório do peso de caixas suportadas por determinada caixa não ultrapasse o peso máximo suportado por essa caixa.

A Restrição (4.45) garante que pdz_{ij} será igual a zero em situações semelhantes às colocadas na Tabela 3 para pdx . Essa restrição é necessária, pois a Restrição (4.13) somente garante o valor de pdz nas situações em que deve ser igual a 1. Isso não representa problema

para o tratamento de não sobreposição, porque colocar variáveis pd iguais a 1 pode indicar uma sobreposição, o que não é algo desejável para o modelo (a Restrição (4.14) limita). Assim, nos casos em que a variável pudesse ser colocada como 0 isso já seria feito.

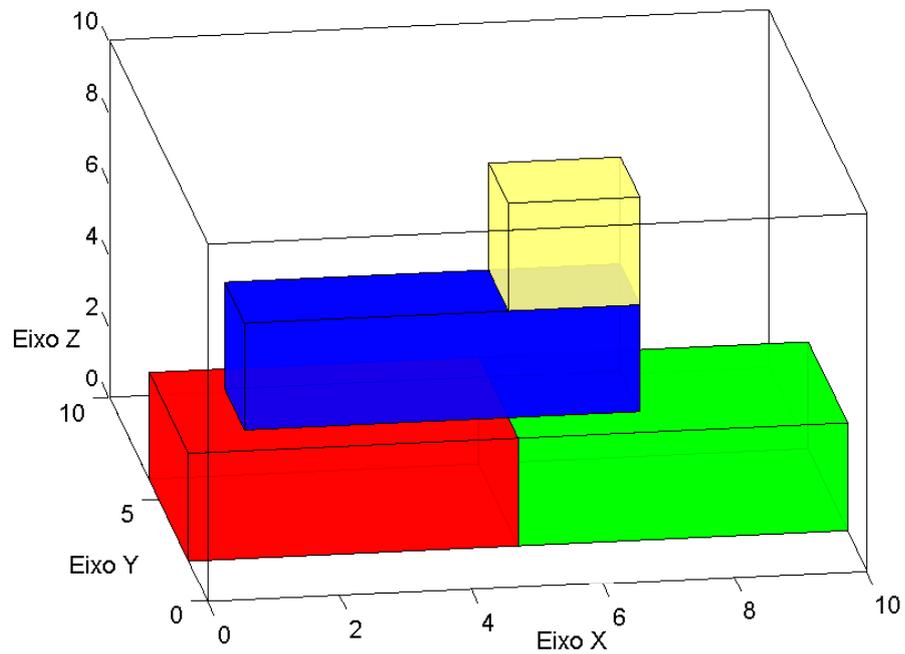
Entretanto, para os casos de Empilhamento e de Múltiplos Destinos (que também considera se uma caixa está suportando a outra) colocar uma variável pdz igual a 1 pode indicar que uma caixa não está suportando outra, que é algo desejável para o modelo, porque há, nessas duas restrições práticas, limitação para uma caixa poder suportar outra. Assim, o modelo, em situações em que pdz tivesse de ser 0, poderia colocá-lo como 1, para indicar que uma caixa não está suportando a outra, mesmo estando, e então validar uma solução que não deveria ser válida. A fim de que isso não ocorresse a Restrição (4.45) foi adicionada.

Caso semelhante ao descrito ocorre com as variáveis xcm_e , xcm_a , ycm_e , ycm_a que, para essa restrição prática, o modelo tende a colocá-las como 0, necessitando das Restrições (4.46) a (4.49) para garantir que sejam iguais a 1 quando devem ser.

A Restrição (4.50) garante que s_{ij} será 1 quando o centro da caixa j estiver sobre a caixa i . As variáveis xcm_{eji} e xcm_{aji} quando iguais a 1 indicam que o valor de coordenada no eixo X do centro da caixa j está entre os valores mínimo e máximo de coordenada no eixo X da caixa i . O mesmo é válido para as variáveis ycm_{eji} e ycm_{aji} em relação a valores de coordenadas no eixo Y. Já as variáveis pdz_{ij} e pdz_{ji} devem ser, respectivamente, iguais a 1 e 0 para que a caixa j esteja após a caixa i no eixo Z, conforme a Tabela 3. Assim, o lado esquerdo da restrição será 0 quando duas caixas, i e j , estiverem no contêiner com j acima de i . Isso forçará s_{ij} ser igual a 1 para a restrição ficar verdadeira. Contudo, se isso não ocorrer (uma das caixas não estiver no contêiner ou o centro de j não estiver acima de i), o lado esquerdo será igual a um número menor que 0 e s_{ij} poderá ser 0. A tendência, nesse segundo caso, é que s_{ij} seja colocado como 0 já que em (4.51), indiretamente, tem-se um limite ao número de variáveis s_{ij} que podem ser iguais a 1.

A Figura 8 retrata uma situação em que a caixa vermelha suporta o peso da azul, a azul suporta o peso da amarela, a verde também suporta o peso da amarela e a amarela não tem peso algum sobre ela.

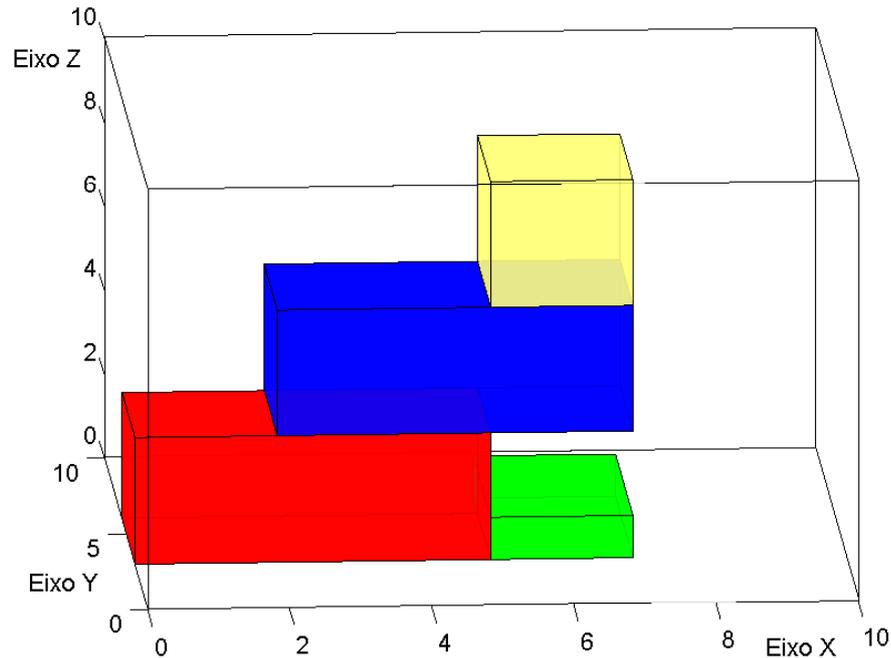
Figura 8: Exemplo de empilhamento de caixas



Fonte: autoria própria

Na subseção 4.3.4, foi afirmado a respeito do problema em utilizar apenas o centro de massa para considerar se caixas estão apoiadas. Tendo isso em vista e analisando a Figura 9, vê-se que após o arranjo das caixas será necessário colocar um suporte entre a caixa verde e a caixa azul. Assim a caixa amarela ficará estável (sendo apoiada indiretamente pelo fundo do contêiner). Deste modo, as restrições de empilhamento já consideram que a caixa verde deve suportar o peso da caixa amarela que está com o centro acima dela.

Figura 9: Exemplo de problema no empilhamento de caixas

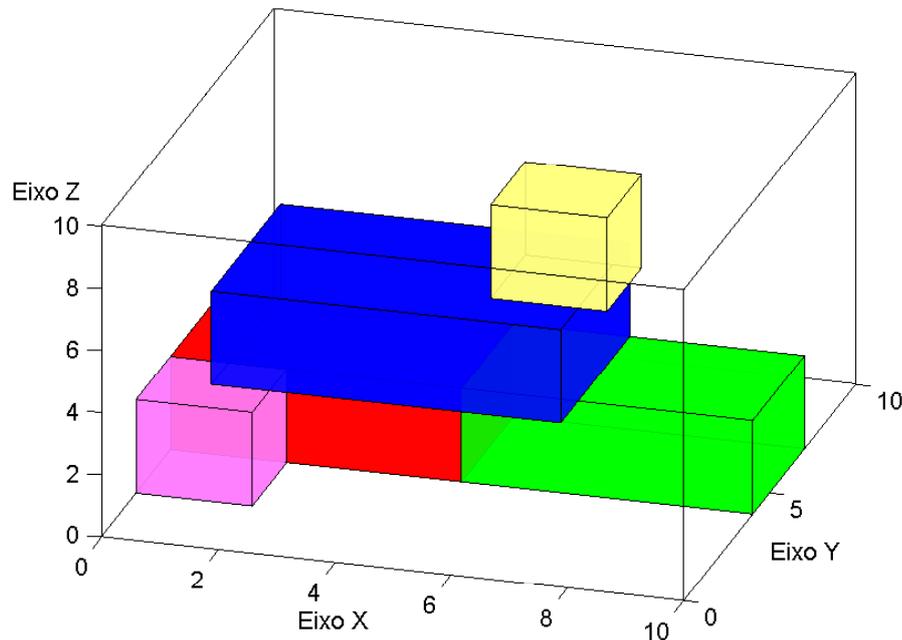


Fonte: autoria própria

4.3.6 Múltiplos Destinos

Foi considerado que cada caixa possui um número que indica a ordem de descarregamento, de modo que caixas com número menor devem ser descarregadas antes de caixas com número maior. Além disso várias caixas podem ter o mesmo número se forem ser retiradas ao mesmo tempo. A Restrição (4.74) não permite que uma caixa fique à frente, em relação a porta do contêiner (definida como o lado de maior coordenada no eixo X do contêiner), de outras de descarregamentos anteriores ao dela e nem que tenha seu peso suportado (mesmo que indiretamente) por caixas de descarregamentos anteriores ao dela. Assim, garantiu-se que não será necessário mexer em outra caixa que não sejam as caixas do descarregamento atual.

Figura 10: Exemplo para ordenação de caixas



Fonte: autoria própria

Considerando o exemplo da Figura 10 e adotando-se como porta a face direita da grande caixa branca (onde a caixa verde encosta), a caixa amarela deve ser descarregada antes da azul e da verde, a caixa verde e a azul devem ser descarregadas antes da vermelha.

Na Restrição (4.74), $(1, 1^{(or_i - or_j)} - 1)$ terá um valor positivo caso a caixa i deva ser entregue depois ou junto da j . Isso implica que a inequação será verdadeira independente do valor das outras variáveis, $6 + |1, 1^{(or_i - or_j)} - 1|$ irá compensar o coeficiente negativo das variáveis binárias, de modo que não importará a localização das caixas. Porém, se a caixa i deve ser entregue antes ($or_i < or_j$), $(1, 1^{(or_i - or_j)} - 1)$ terá um valor negativo maior que -1 . Assim, pelo menos uma das variáveis binárias de coeficiente negativo (que indicam se as caixas estão no contêiner e se a j está na frente da i) deverá ser igual a zero (uma ser tirada do contêiner ou a caixa j não ficar na frente da i) para a inequação ficar verdadeira. Se a caixa i estiver suportando o peso da j ($s_{ij}=1$), $d_i, d_j, pdx_{ij}, pdy_{ij}, pdy_{ji}$ e pdz_{ij} serão sempre iguais a 1 e pdz_{ji} igual a 0, a inequação ficará $|1, 1^{(or_i - or_j)} - 1| + (1, 1^{(or_i - or_j)} - 1) + (1, 1^{(or_i - or_j)} - 1) \geq 0$. Com isso, or_i não poderá ser menor que or_j , pois o resultado seria negativo, não satisfazendo a inequação. Com isso, uma caixa i somente pode suportar uma caixa j se a entrega da i for feita ao mesmo tempo ou depois da entrega da j .

4.3.7 Limite e Distribuição de Peso Dentro do Contêiner

Foi adotado que cada caixa i exerce um peso p_i (como já dito na subseção 4.3.5) e que o contêiner tem um limite máximo de peso suportado, PS . Para que isso possa ser respeitado, foi adicionada a Restrição (4.55) que mantém o somatório dos pesos de caixas que estão no

contêiner ($d = 1$) menor que o limite do contêiner.

Também é importante que o centro de massa do contêiner fique entre certos limites, pois se o peso se concentrar mais de um lado ou mais no alto o contêiner poderia virar durante o transporte. Para que seja possível restringir isso, criou-se antes restrições que atribuíssem os valores das coordenadas dos centros de massa de cada caixa a variáveis, caso estas estivessem no contêiner, ou colocassem zero caso não. São elas: (4.56) a (4.59), (4.62) a (4.65) e (4.68) a (4.71). Assim, é possível fazer a média ponderada dos pesos com as coordenadas em X, Y, Z das caixas dentro do contêiner e limitá-la a faixa de valores desejada (Restrições: (4.60), (4.61), (4.66), (4.67), (4.72), (4.73)).

4.3.8 Prioridades

Em Bortfeldt e Gehring (1999 apud BORTFELDT; WÄSCHER et al., 2012) vê-se prioridades de carregamento rígidas, que divide as caixas em dois grupos, de forma que uma caixa de prioridade baixa não pode ser carregada a não ser que todas de prioridade alta estejam incluídas. Este trabalho tratou o problema de maneira semelhante, porém, permitindo definir várias classes de prioridade através de um número, pr , que a represente, de maneira que um número maior representa uma prioridade maior. Isso é tratado pela Restrição (4.54), que não permite que uma caixa com prioridade maior fique de fora enquanto uma com prioridade menor esteja dentro do contêiner. Um problema em se tratar esse requisito de tal forma é que se as caixas colocadas com prioridades maiores que as outras não couberem dentro do contêiner, sobrar nem que seja uma que não possa ser colocada, as caixas de prioridade menor que a dela também não serão colocadas, mesmo que elas caibam. Assim, deve ser utilizada somente se o volume total de caixas que queira colocar prioridade seja menor que o volume do contêiner.

4.3.9 Carregamento Completo de Grupo de Itens

Foi atribuído um número para cada caixa que representa o grupo que ela pertence, se uma caixa não pertence ao mesmo grupo que nenhuma outra caixa, ela possui um número único. Assim, as Restrições (4.52) e (4.53) garantem que uma caixa de determinado grupo somente pode ser colocada no contêiner se todas do mesmo grupo também forem, se não forem todas desse grupo devem ficar de fora. As restrições funcionam da seguinte forma: para cada par de caixa i e j se os números dos grupos g_i e g_j forem diferentes, haverá um coeficiente diferente de zero multiplicando M validando as duas inequações independente dos valores de d . Porém, se os grupos forem iguais, M será multiplicado por zero. Assim, d_i e d_j deverão obrigatoriamente ser iguais (ou ambas 1 ou ambas 0) para que a diferença entre elas seja zero e as duas inequações sejam válidas ($d_i - d_j \leq 0$ e $d_i - d_j \geq 0$).

4.4 Divisão de Restrições por Uso

A Tabela 4.4 mostra as restrições do modelo, a quantidade de cada uma (em que n é o número de caixas) e quais restrições práticas necessitam delas.

Tabela 4: Restrições

| Restrição | Quantidade |
|---|--|
| <p>Não Sobreposição e Diferentes Orientações</p> $lx_i + ly_i + lz_i = 1$ $wx_i + wy_i + wz_i = 1$ $hx_i + hy_i + hz_i = 1$ $lx_i + wx_i + hx_i = 1$ $ly_i + wy_i + hy_i = 1$ $lz_i + wz_i + hz_i = 1$ $x_i + l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i \leq L + (1 - d_i) \cdot M$ $y_i + l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i \leq W + (1 - d_i) \cdot M$ $z_i + l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i \leq H + (1 - d_i) \cdot M$ $x_j - x_i + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j \leq M \cdot pdx_{ij}$ $y_j - y_i + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j \leq M \cdot pdy_{ij}$ $z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \leq M \cdot pdz_{ij}$ $pdx_{ij} + pdx_{ji} + pdy_{ij} + pdy_{ji} + pdz_{ij} + pdz_{ji} + d_i + d_j \leq 7$ | <p>Total: $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1) / 2$</p> |
| <p>Orientação com Altura Fixa</p> $hz_i \geq a_i$ | <p>Total: n</p> <p>n</p> |
| <p>Estabilidade</p> <p>Vertical e Horizontal no eixo Y</p> $x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - (x_j + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j) \leq -(1/M) + M \cdot (1 - xcme_{ij})$ $x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - x_j \geq (1/M) - M \cdot (1 - xcma_{ij})$ <p>Vertical e Horizontal no eixo X</p> $y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - (y_j + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j) \leq -(1/M) + M \cdot (1 - ycme_{ij})$ $y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - y_j \geq (1/M) - M \cdot (1 - ycma_{ij})$ <p>Horizontal nos eixos X e Y</p> | <p>Total: $10 \cdot n + 19 \cdot n \cdot (n - 1)$</p> <p>Total: $2 \cdot n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>Total: $2 \cdot n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>$n \cdot (n - 1)$</p> <p>Total: $2 \cdot n \cdot (n - 1)$</p> |

Continua na página seguinte

Tabela 4 – Continuação da página anterior

| Restrição | Quantidade |
|---|--|
| $z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) - (z_j + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j) \leq -(1/M) + M \cdot (1 - zcme_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) - z_j \geq (1/M) - M \cdot (1 - zcma_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| Horizontal no eixo X | Total: $n \cdot (n - 1)$ |
| $x_j - x_i + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j \geq -M \cdot ndx_{ij}$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| Horizontal no eixo Y | Total: $n \cdot (n - 1)$ |
| $y_j - y_i + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j \geq -M \cdot ndy_{ij}$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| Vertical | Total: $2 \cdot n + 3 \cdot n \cdot (n - 1)$ |
| $z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \geq -M \cdot ndz_{ij}$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $M \cdot pdz_{ij} + M \cdot ndz_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apz_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $-M \cdot pdz_{ij} - M \cdot ndz_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apz_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $z_i \leq M \cdot (1 - ecz_i)$ | n |
| $\sum_{j=1}^n (apz_{ij}) \geq 1 - ecz_i$ | n |
| Horizontal no sentido negativo do eixo Y | Total: $2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n - 1)$ |
| $M \cdot pdy_{ij} + M \cdot ndy_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apy_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $-M \cdot pdy_{ij} - M \cdot ndy_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apy_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $y_i \leq M \cdot (1 - ecy_i)$ | n |
| $\sum_{j=1}^n (apy_{ij}) \geq 1 - ecy_i$ | n |
| Horizontal no sentido negativo do eixo X | Total: $2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n - 1)$ |
| $M \cdot pdx_{ij} + M \cdot ndx_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apx_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $-M \cdot pdx_{ij} - M \cdot ndx_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apx_{ij})$ | $n \cdot (n - 1)$ |
| $x_i \leq M \cdot (1 - ecx_i)$ | n |
| $\sum_{j=1}^n (apx_{ij}) \geq 1 - ecx_i$ | n |
| Horizontal no sentido positivo do eixo Y | Total: $2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n - 1)$ |

Continua na página seguinte

Tabela 4 – Continuação da página anterior

| Restrição | Quantidade |
|--|--|
| $M \cdot pdy_{ji} + M \cdot ndy_{ji} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apyf_{ij})$ $-M \cdot pdy_{ji} - M \cdot ndy_{ji} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apyf_{ij})$ $y_i + l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i \geq L - M \cdot (1 - ecyf_i)$ $\sum_{j=1}^n (apyf_{ij}) \geq 1 - ecyf_i$ <p>Horizontal no sentido positivo do eixo X</p> $M \cdot pdx_{ji} + M \cdot ndx_{ji} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \leq 6 + 3 \cdot M \cdot (1 - apxf_{ij})$ $-M \cdot pdx_{ji} - M \cdot ndx_{ji} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + zcme_{ij} + zcma_{ij} + d_i + d_j \geq 6 - 3 \cdot M \cdot (1 - apxf_{ij})$ $x_i + l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i \geq L - M \cdot (1 - ecx f_i)$ $\sum_{j=1}^n (apxf_{ij}) \geq 1 - ecx f_i$ | $n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ n n Total: $2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ n n |
| <p>Empilhamento e Múltiplos Destinos</p> $z_j - z_i + l_j \cdot lz_j + w_j \cdot wz_j + h_j \cdot hz_j \geq (1/M) - M \cdot (1 - pdz_{ij})$ $x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - (x_j + l_j \cdot lx_j + w_j \cdot wx_j + h_j \cdot hx_j) \geq -M \cdot (xcme_{ij})$ $x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - x_j \leq M \cdot (xcma_{ij})$ $y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - (y_j + l_j \cdot ly_j + w_j \cdot wy_j + h_j \cdot hy_j) \geq -M \cdot (ycme_{ij})$ $y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - y_j \leq M \cdot (ycma_{ij})$ $-7 + pdz_{ij} + xcme_{ij} + xcma_{ij} + ycme_{ij} + ycma_{ij} + d_i + d_j - pdz_{ji} \leq s_{ij} - 1$ | Total: $6 \cdot n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ |
| <p>Empilhamento</p> $\sum_{j=1}^n (p_j \cdot s_{ij}) \leq ps_i$ | Total: n n |
| <p>Múltiplos Destinos</p> $6 + 1, 1^{(or_i - or_j)} - 1 - d_i - d_j - pdx_{ij} - pdy_{ij} - pdz_{ij} - (1, 1^{(or_i - or_j)} - 1) \cdot pdz_{ji} + (1, 1^{(or_i - or_j)} - 1) \cdot s_{ij} \geq 0$ | Total: $n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1)$ |
| <p>Carregamento completo de Grupos</p> $M \cdot g_i - g_j + d_i - d_j \geq 0$ | Total: $n \cdot (n - 1)$ $n \cdot (n - 1) / 2$ |

Continua na página seguinte

Tabela 4 – Continuação da página anterior

| Restrição | Quantidade |
|---|--|
| $-M \cdot g_i - g_j + d_i - d_j \leq 0$ | $n \cdot (n - 1) / 2$ |
| Prioridade $(pr_i - pr_j) \cdot d_i + (pr_j - pr_i) \cdot d_j \geq 0$ | Total: $n \cdot (n - 1) / 2$ $n \cdot (n - 1) / 2$ |
| Peso Máximo do Contêiner $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i) \leq PS$ | Total: 1 1 |
| Distribuição de Peso no Contêiner $xc_i \leq x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) + M \cdot (1 - di)$ $xc_i \geq x_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lx_i + w_i \cdot wx_i + h_i \cdot hx_i) - M \cdot (1 - di)$ $xc_i \leq M \cdot di$ $xc_i \geq -M \cdot di$ $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot xc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot XC_{max})$ $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot xc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot XC_{min})$ $yc_i \leq y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) + M \cdot (1 - di)$ $yc_i \geq y_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot ly_i + w_i \cdot wy_i + h_i \cdot hy_i) - M \cdot (1 - di)$ $yc_i \leq M \cdot di$ $yc_i \geq -M \cdot di$ $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot yc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot YC_{max})$ $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot yc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot YC_{min})$ $zc_i \leq z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) + M \cdot (1 - di)$ $zc_i \geq z_i + 0,5 \cdot (l_i \cdot lz_i + w_i \cdot wz_i + h_i \cdot hz_i) - M \cdot (1 - di)$ $zc_i \leq M \cdot di$ $zc_i \geq -M \cdot di$ | Total: $12 \cdot n + 6$ n n n n 1 1 n n n n 1 1 n n n n |

Continua na página seguinte

Tabela 4 – Continuação da página anterior

| Restrição | Quantidade |
|--|------------|
| $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot zc_i) \leq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot ZC_{max})$ | 1 |
| $\sum_{i=1}^n (p_i \cdot zc_i) \geq \sum_{i=1}^n (p_i \cdot d_i \cdot ZC_{min})$ | 1 |

4.5 Casos de Uso

Os testes foram realizados conforme descrito na seção 3.1. Deve-se destacar que os tempos de execução retratam apenas casos específicos e não uma estatística de vários casos. Outro ponto observado é que, nos vários testes feitos, os tempos de execução, para problemas em que o volume do contêiner era maior que o volume total de caixas, foram, grande parte das vezes, maiores que os de outros casos. Isso pode ser visto nos casos de uso abaixo, com os tempos de execução do Caso de Uso 1, na maior parte, maiores que os outros.

4.5.1 Caso de Uso 1

Informações:

- Dimensões do Contêiner: 7x6x6
- Tipos de Caixas: 4
- Caixas de cada tipo: 2
- Total de caixas: 8
- Tipos:
 - Dimensões Tipo 1 (Vermelhas): 5x4x3
 - Dimensões Tipo 2 (Verdes): 4x2x4
 - Dimensões Tipo 3 (Azuis): 5x2x2
 - Dimensões Tipo 4 (Amarelas): 3x2x4

Foi executado para esse caso de uso testes com o modelo somente com restrições de não sobreposição e orientação (subseção 4.5.1.1), e elas combinadas com restrições de altura fixa (subseção 4.5.1.2), limite de peso do contêiner (subseção 4.5.1.3), distribuição de peso no contêiner (subseção 4.5.1.4), carregamento completo de grupos de caixas (subseção 4.5.1.5), prioridade (subseção 4.5.1.6), múltiplos destinos (subseção 4.5.1.7) e empilhamento (subseção 4.5.1.8). Para cada teste, comparou-se o resultado obtido com o apresentado na subseção 4.5.1.1. Dessa forma, foi possível perceber a atuação de cada restrição prática no modelo.

4.5.1.1 Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de caixas

Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

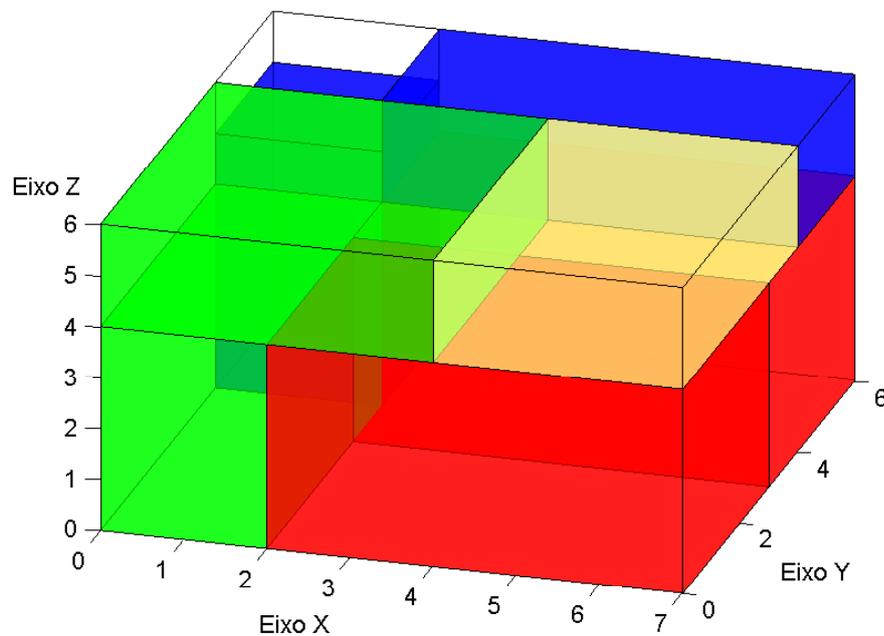
- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;

- Número de Restrições = $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 268$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 154,31 segundos;
- Iterações = 2586234;
- Nós Explorados = 171115;

Figura 11: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 11, mostra uma forma de levar todas as caixas exceto uma amarela. O volume total de caixas dentro do contêiner é de 248, que representa o valor máximo para esse caso de uso.

4.5.1.2 Restrições Básicas e Altura de Caixas Fixa

Para este caso, foi fixada a altura das caixas amarelas. Assim, o lado de tamanho 4 deve ficar paralelo ao eixo Z. Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

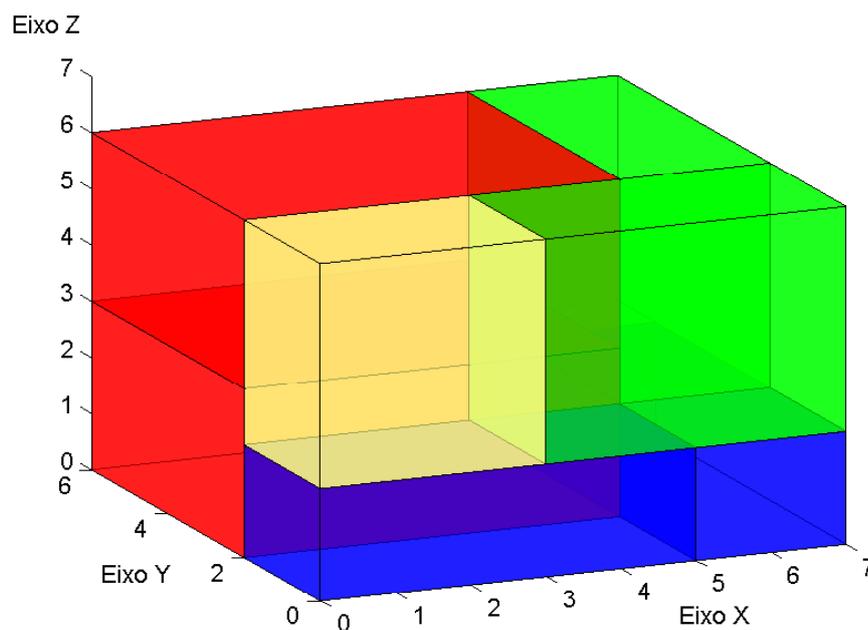
- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;

- Reais = $3 \cdot n = 24$;
- Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $10 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 276$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 23,72 segundos;
- Iterações = 446919;
- Nós Explorados = 28699;

Figura 12: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Orientação com a Altura Fixada



Fonte: autoria própria

O resultado mostrado na Figura 12 apresenta a caixa amarela com o lado de tamanho 4 paralelo ao eixo Z, diferenciando-se do resultado do modelo apenas com as restrições básicas (Figura 11) que apresentava a caixa amarela com o lado de tamanho 2 paralelo ao eixo Z.

4.5.1.3 Restrições Básicas e Limite de Peso do Contêiner

Valores usados para as constantes necessárias:

- Limite de peso do contêiner: 100

- Peso das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 25
 - Tipo 2 (Verdes): 20
 - Tipo 3 (Azuis): 10
 - Tipo 4 (Amarelas): 5

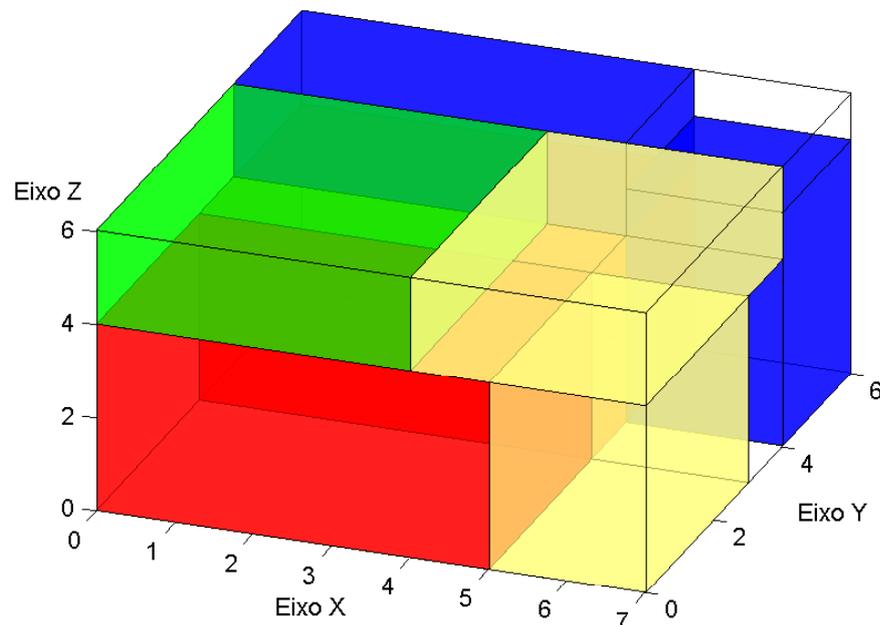
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) + 1 = 269$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 240;
- Tempo = 2,15 segundos;
- Iterações = 26457;
- Nós Explorados = 3918;

Figura 13: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Limite de Peso no Contêiner



Fonte: autoria própria

Comparando-se o resultado mostrado na Figura 13 com o resultado do modelo apenas com as restrições básicas (Figura 11), pode-se observar que foi colocada uma caixa amarela no lugar de uma verde para que fosse respeitado o limite de peso do contêiner. O peso total do resultado da Figura 11, que possui o maior volume possível de caixas no contêiner, seria de 115 o que não respeita o limite de peso do contêiner colocado como 100. Assim, o solucionador do modelo encontrou uma solução com o maior volume possível e que respeite o limite de peso, que é mostrada na Figura 13, cujo peso total foi de 95.

4.5.1.4 Restrições Básicas e Distribuição de Peso no Contêiner

Valores usados para as constantes necessárias:

- Limite de peso do contêiner: 100
- Intervalo de coordenadas para o centro de massa:
 - Eixo X: 3 a 7;
 - Eixo Y: 0 a 3;
 - Eixo Z: 3 a 6;
- Peso das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 25;

- Tipo 2 (Verdes): 20;
- Tipo 3 (Azuis): 10;
- Tipo 4 (Amarelas): 5;

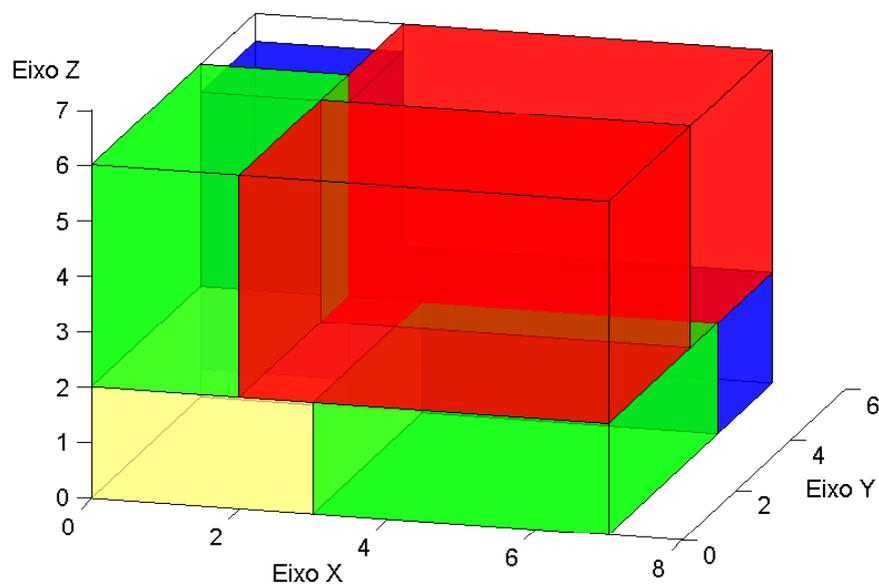
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $16 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 296$;
 - Reais = $6 \cdot n = 48$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $21 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) + 6 = 370$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 36,95 segundos;
- Iterações = 489986;
- Nós Explorados = 27284;

Figura 14: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Distribuição de Peso no Contêiner



Fonte: autoria própria

O resultado visto na Figura 14 conservou as mesmas caixas no contêiner que a solução do modelo apenas com restrições básicas (Figura 11), por ser esta a combinação com maior volume que caiba no contêiner. Entretanto, o posicionamento das caixas foi alterado e caixas vermelhas e verdes (definidas com um peso maior) ficaram em coordenadas maiores nos eixos X e Z, e menores no eixo Y, para que o centro de massa do contêiner atendesse os intervalos definidos. Eles foram escolhidos para que fosse possível ver mudanças no posicionamento das caixas, o mais desejável é que sejam próximos ao centro e ao fundo do contêiner, para mantê-lo estável. O centro de massa da resposta obtida está, aproximadamente, nas coordenadas: $X=3,54$, $Y=2,96$ e $Z=3$.

4.5.1.5 Restrições Básicas e Carregamento Completo de Grupos de Caixas

Valores usados para as constantes necessárias:

- Grupo das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 2;
 - Tipo 2 (Verdes): Nenhum;
 - Tipo 3 (Azuis): 1;
 - Tipo 4 (Amarelas): 1;

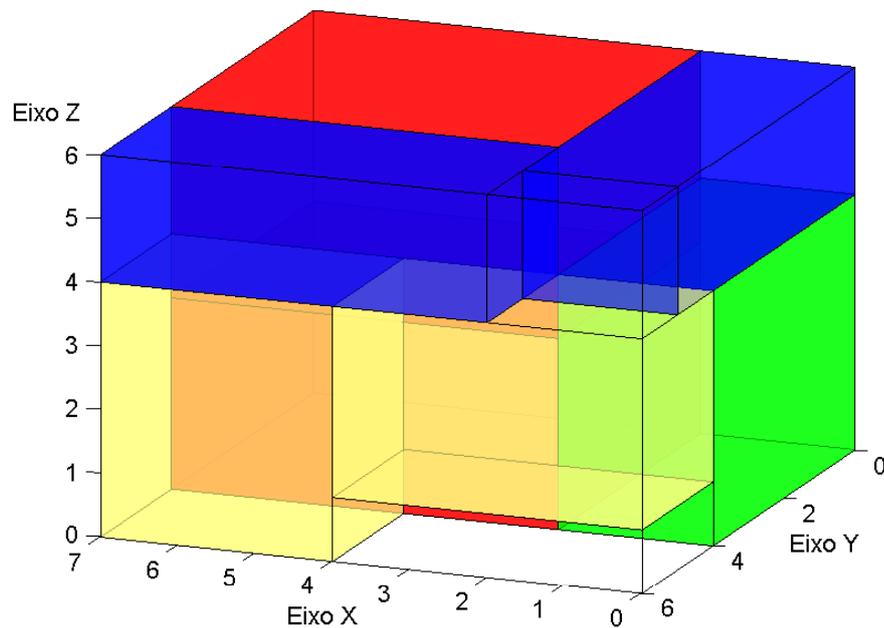
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 4,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 324$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 240;
- Tempo = 21,05 segundos;
- Iterações = 336249;
- Nós Explorados = 22252;

Figura 15: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Carregamento Completo de Grupos de Caixas



Fonte: autoria própria

Analisando-se a Figura 15, pode-se ver que uma caixa verde foi deixada de fora, diferenciando-se do resultado do modelo apenas com restrições básicas (Figura 11). O modelo chegou a este resultado porque as caixas amarelas e azuis fazem parte de um mesmo grupo, assim como as duas caixas vermelhas constituem um outro grupo. Portanto, deixar qualquer uma delas de fora implicaria em deixar todo o grupo fora do contêiner, restando um volume muito pequeno de caixas dentro. Desta maneira, foi deixada de fora uma caixa verde que não possui grupo, obtendo-se tal resultado, que coloca o maior volume de caixas possível no contêiner e respeita as restrições de carregamento completo de grupos, mostrado na Figura 15.

4.5.1.6 Restrições Básicas e Prioridade

Valores usados para as constantes necessárias:

- Prioridade das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 1;
 - Tipo 2 (Verdes): 2;
 - Tipo 3 (Azuis): 2;
 - Tipo 4 (Amarelas): 3;

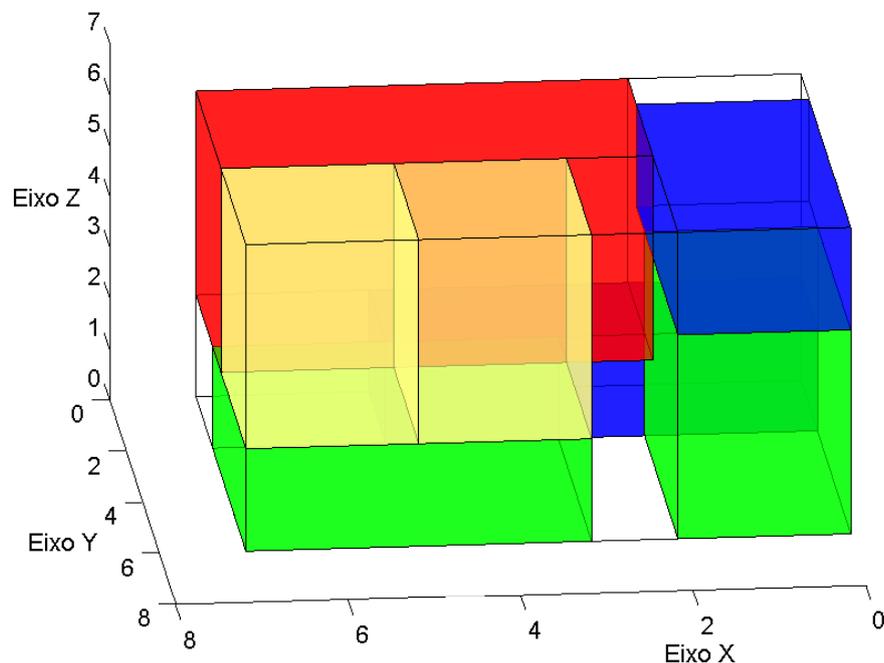
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 4 \cdot n \cdot (n - 1) = 296$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 212;
- Tempo = 24,32 segundos;
- Iterações = 451051;
- Nós Explorados = 29939;

Figura 16: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Prioridade de Caixas



Fonte: autoria própria

O resultado apresentado na Figura 16 se difere do resultado obtido somente com as restrições básicas (Figura 11), pois, foi definido que as caixas amarelas tinham maior prioridade que as outras caixas, e as caixas vermelhas tinham a menor prioridade. Assim, todas as amarelas foram alocadas no contêiner, enquanto uma vermelha ficou de fora por não caber todas as caixas.

4.5.1.7 Restrições Básicas e Múltiplos Destinos

Valores usados para as constantes necessárias:

- Ordem de entrega das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 1;
 - Tipo 2 (Verdes): 2;
 - Tipo 3 (Azuis): 3;
 - Tipo 4 (Amarelas): 4;

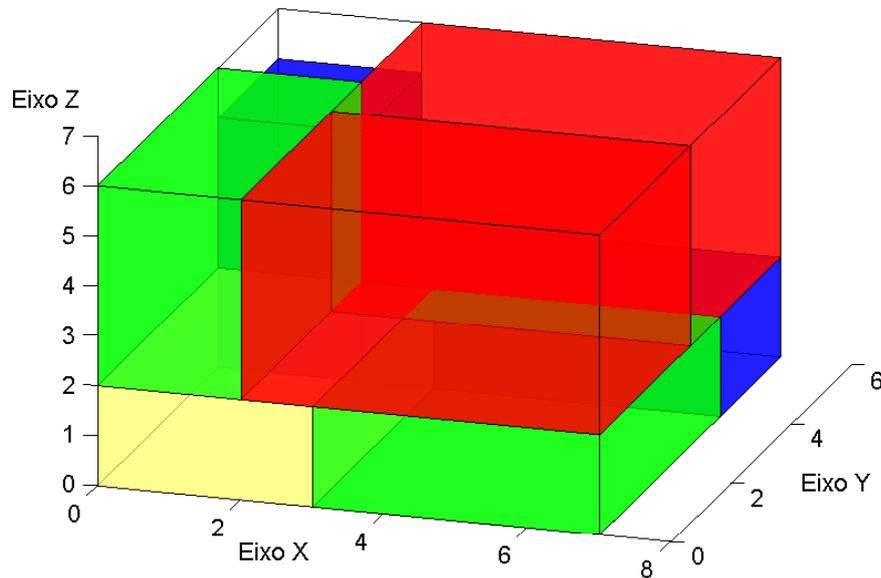
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 8 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 552$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 8 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 528$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 10,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 660$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 38,87 segundos;
- Iterações = 250559;
- Nós Explorados = 12034;

Figura 17: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Múltiplos Destinos



Fonte: autoria própria

Como explicado na seção 4.3.6 a porta do contêiner foi adotada como a face de maior coordenada no eixo X. No resultado apresentado na Figura 17 ela é a face mais a direita da imagem. Por esse resultado, vê-se que houve uma mudança no posicionamento das caixas, em relação a resposta obtida somente com as restrições básicas (Figura 11), para que fossem atendidas as restrições de múltiplos destinos. Dessa forma, as caixas vermelhas, que são as primeiras a serem entregues, podem ser retiradas sem ser necessário mexer em outra caixa. Depois que elas saírem, as caixas verdes e azuis podem sair também. Finalmente, quando todas as outras saírem, é possível retirar a amarela, que é a última a ser entregue.

4.5.1.8 Restrições Básicas e Empilhamento

Valores usados para as constantes necessárias:

- Peso das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 10;
 - Tipo 2 (Verdes): 20;
 - Tipo 3 (Azuis): 20;
 - Tipo 4 (Amarelas): 5;
- Peso suportado pelas das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 0;

- Tipo 2 (Verdes): 30;
- Tipo 3 (Azuis): 10;
- Tipo 4 (Amarelas): 10;

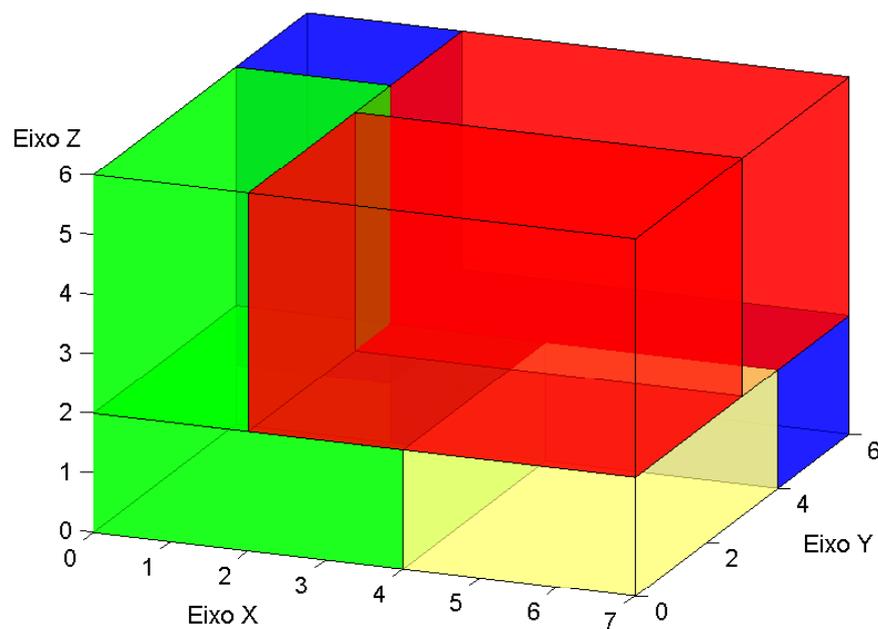
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 8 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 552$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 8 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 528$;
- Número de Restrições = $10 \cdot n + 9,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 612$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 146,73 segundos;
- Iterações = 1279031;
- Nós Explorados = 73542;

Figura 18: Resultado do Caso de Uso 1 - Modelo com Restrições de Empilhamento



Fonte: autoria própria

Vê-se na Figura 18 que a disposição das caixas no contêiner foi alterada em comparação ao resultado do modelo apenas com as restrições básicas (Figura 11). As caixas vermelhas foram colocadas mais acima, pois foram definidas como não suportando peso algum, não sendo então colocadas caixas sobre elas. O peso delas, que foi definido como 10 cada, está sendo suportado por uma caixa amarela e uma azul (pois os centros das vermelhas estão acima delas, conforme explicado na subseção 4.3.5) que aguentam esse exato peso. As caixas verdes apenas podiam estar acima de outras caixas verdes, pois eram as únicas que suportavam tal peso. Assim, uma ficou apoiada no chão do contêiner com a segunda sobre ela.

4.5.2 Caso de Uso 2

Informações:

- Dimensões do Contêiner: 8x8x8
- Tipos de Caixas: 4
- Caixas de cada tipo: 2
- Total de caixas: 8
- Tipos:
 - Dimensões Tipo 1 (Vermelhas): 5x3x7
 - Dimensões Tipo 2 (Verdes): 3x2x3
 - Dimensões Tipo 3 (Azuis): 5x3x3
 - Dimensões Tipo 4 (Amarelas): 2x5x4

Foi executado para esse caso de uso testes com o modelo somente com restrições de não sobreposição e orientação (subseção 4.5.2.1), e elas combinadas com restrições de estabilidade vertical (subseção 4.5.2.2), estabilidades vertical e horizontal no eixo Y (subseção 4.5.2.3), estabilidades vertical e horizontais nos eixos X e Y (subseção 4.5.2.4). Para cada teste, comparou-se o resultado obtido com o apresentado na subseção 4.5.2.1. Dessa forma, foi possível perceber a atuação de cada restrição prática no modelo.

4.5.2.1 Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de Caixas

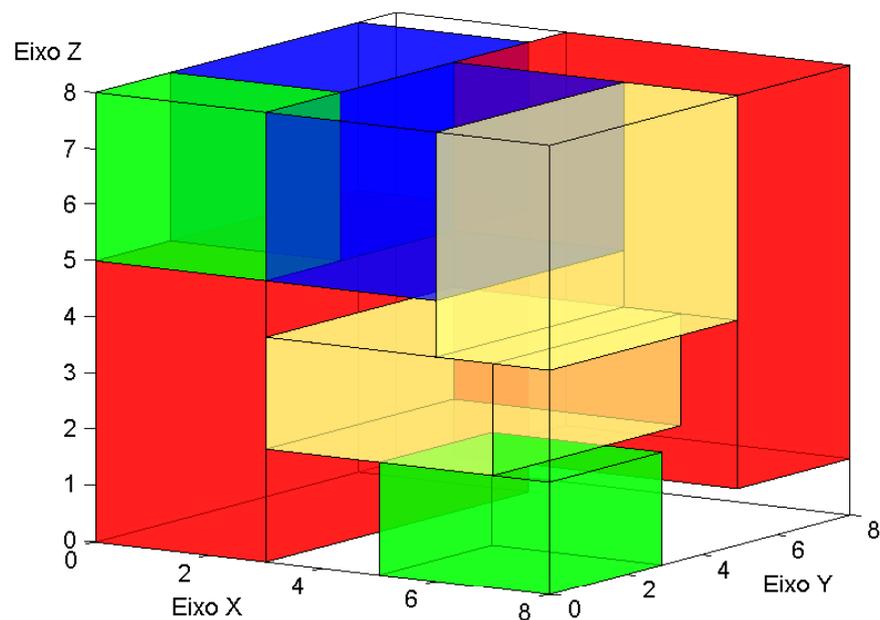
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 268$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 416;
- Tempo = 0,32 segundos;
- Iterações = 1014;
- Nós Explorados = 1;

Figura 19: Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 19, demonstra um posicionamento de caixas sem estabilidade vertical e horizontal. Vê-se caixas sem apoio na face inferior ou em faces laterais.

4.5.2.2 Restrições Básicas e Estabilidade Vertical

Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

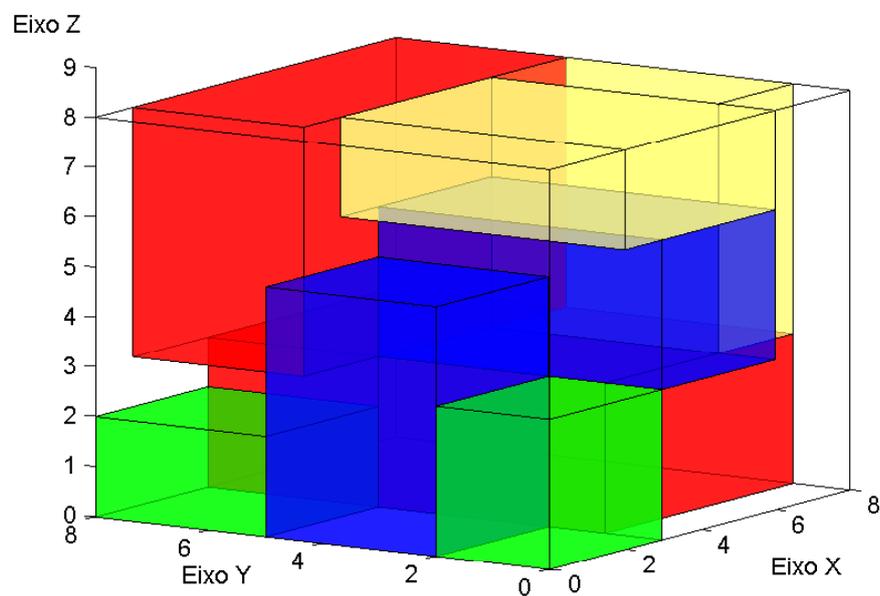
- Número de Variáveis = $14 \cdot n + 9 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 616$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $11 \cdot n + 9 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 592$;

- Número de Restrições = $11 \cdot n + 10,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 676$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 248;
- Tempo = 23,72 segundos;
- Iterações = 446919;
- Nós Explorados = 28699;

Figura 20: Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidade Vertical



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 20, demonstra um posicionamento de caixas com estabilidade vertical e sem estabilidade horizontal. Vê-se que todas as caixas estão com a face inferior apoiada, porém algumas faces laterais não estão.

4.5.2.3 Restrições Básicas e Estabilidades Vertical e Horizontal no Eixo Y

Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

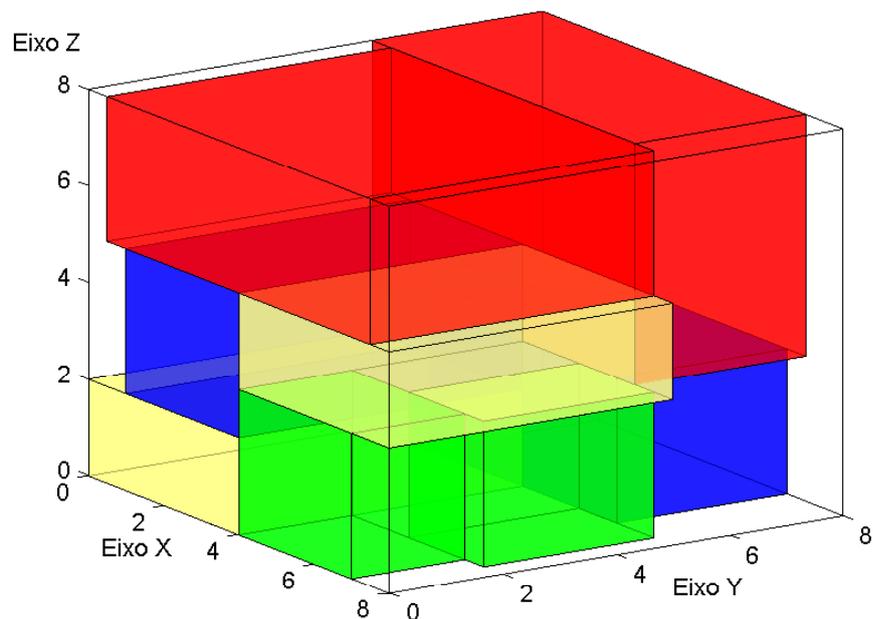
- Número de Variáveis = $16 \cdot n + 14 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 912$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $13 \cdot n + 14 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 888$;

- Número de Restrições = $15 \cdot n + 17,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 1100$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 416;
- Tempo = 2,93 segundos;
- Iterações = 26390;
- Nós Explorados = 1478;

Figura 21: Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidades Vertical e Horizontal no Eixo Y



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 21, demonstra um posicionamento de caixas com estabilidade vertical e estabilidade horizontal no eixo Y. Vê-se que todas as caixas estão com a face inferior e as laterais perpendiculares ao eixo Y apoiadas.

4.5.2.4 Restrições Básicas e Estabilidades Vertical e Horizontais nos Eixos X e Y

Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $18 \cdot n + 17 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 1096$;
- Reais = $3 \cdot n = 24$;

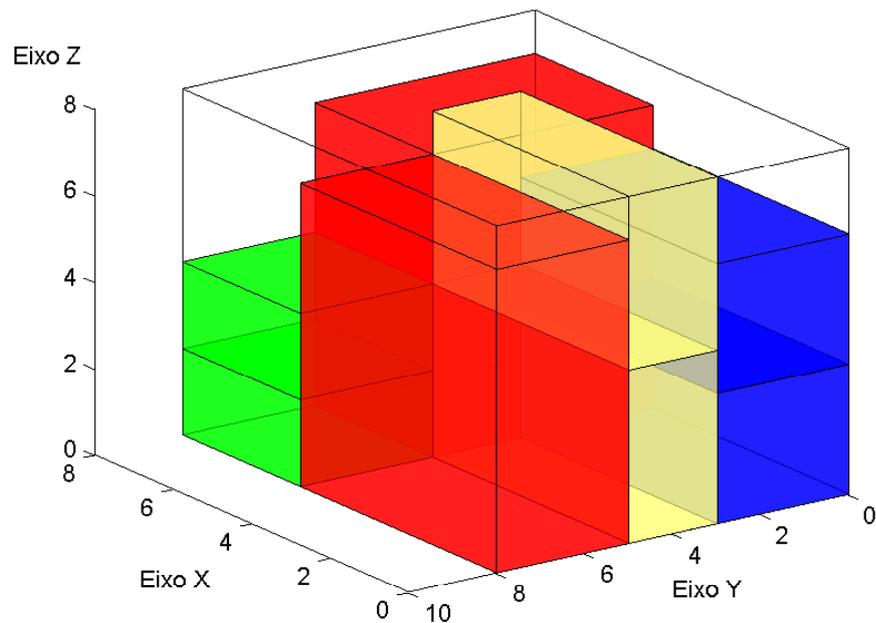
$$\text{– Binárias} = 15 \cdot n + 17 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 1072;$$

$$\bullet \text{ Número de Restrições} = 19 \cdot n + 22,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 1412;$$

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 416;
- Tempo = 8,88 segundos;
- Iterações = 85712;
- Nós Explorados = 2794;

Figura 22: Resultado do Caso de Uso 2 - Modelo com Restrições de Estabilidades Vertical e Horizontais nos eixos X e Y



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 22, demonstra um posicionamento de caixas com estabilidade vertical e estabilidade horizontal nos eixos X e Y. Vê-se que todas as caixas estão com a face inferior e as laterais apoiadas.

4.5.3 Caso de Uso 3

Informações:

- Dimensões do Contêiner: 7x6x10
- Tipos de Caixas: 4

- Caixas de cada tipo: 2
- Total de caixas: 8
- Tipos:
 - Dimensões Tipo 1 (Vermelhas): 5x3x7
 - Dimensões Tipo 2 (Verdes): 3x2x3
 - Dimensões Tipo 3 (Azuis): 5x3x3
 - Dimensões Tipo 4 (Amarelas): 2x5x4

Foi executado para esse caso de uso testes com o modelo somente com restrições de não sobreposição e orientação (subseção 4.5.3.1), e elas combinadas com restrições de altura fixa, limite de peso do contêiner, distribuição de peso no contêiner, carregamento completo de grupos de caixas, prioridade, múltiplos destinos, empilhamento e estabilidade vertical (subseção 4.5.3.2). Para o teste da subseção 4.5.3.2, comparou-se o resultado obtido com o apresentado na subseção 4.5.3.1. Dessa forma, foi possível perceber a atuação das restrições práticas aplicadas em conjunto.

4.5.3.1 Restrições Básicas: Não Sobreposição e Orientação de Caixas

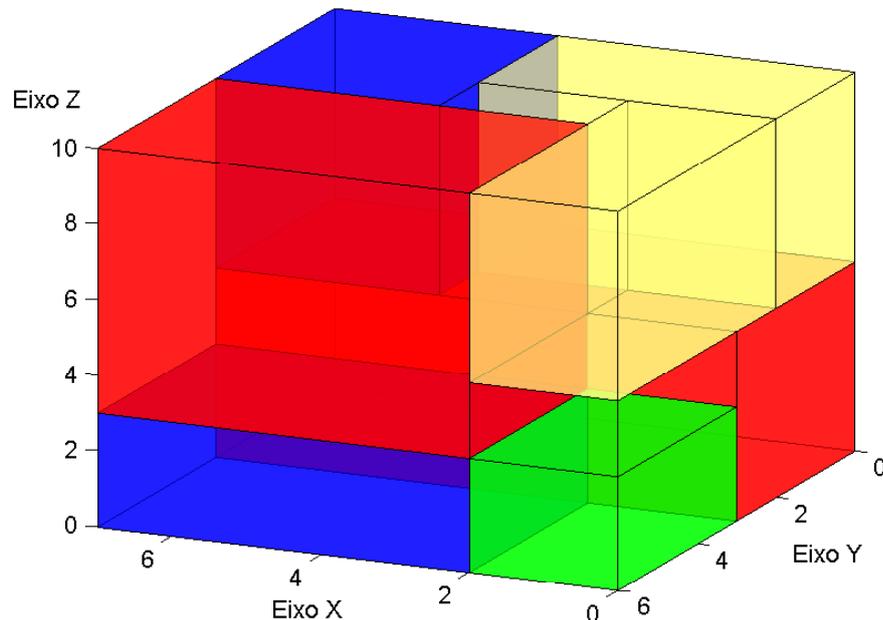
Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

- Número de Variáveis = $13 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 272$;
 - Reais = $3 \cdot n = 24$;
 - Binárias = $10 \cdot n + 3 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 248$;
- Número de Restrições = $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1) = 268$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 398;
- Tempo = 28.79 segundos;
- Iterações = 719050;
- Nós Explorados = 59929;

Figura 23: Resultado do Caso de Uso 3 - Modelo com Restrições de Não Sobreposição e Orientação de caixas



Fonte: autoria própria

O resultado desse teste, apresentado na Figura 23, mostra uma forma de levar todas as caixas exceto uma verde. O volume total de caixas dentro do contêiner é de 398, que representa o valor máximo para esse caso de uso.

4.5.3.2 Restrições Básicas, Altura Fixa, Múltiplos Destinos, Empilhamento, Prioridade, Estabilidade Vertical, Carregamento Completo de Grupos de Caixas, Limite e Distribuição de Peso no Contêiner

Valores usados para as constantes necessárias:

- Limite de peso do contêiner: 33
- Intervalo de coordenadas para o centro de massa:
 - Eixo X: 0 a 4;
 - Eixo Y: 2 a 4;
 - Eixo Z: 0 a 5;
- Peso das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 10
 - Tipo 2 (Verdes): 3
 - Tipo 3 (Azuis): 2

- Tipo 4 (Amarelas): 3
- Peso suportado pelas das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 5;
 - Tipo 2 (Verdes): 5;
 - Tipo 3 (Azuis): 5;
 - Tipo 4 (Amarelas): 5;
- Ordem de entrega das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 3;
 - Tipo 2 (Verdes): 1;
 - Tipo 3 (Azuis): 2;
 - Tipo 4 (Amarelas): 1;
- Prioridade das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): 2;
 - Tipo 2 (Verdes): 2;
 - Tipo 3 (Azuis): 1;
 - Tipo 4 (Amarelas): 1;
- Grupo das caixas:
 - Tipo 1 (Vermelhas): Nenhum;
 - Tipo 2 (Verdes): Nenhum;
 - Tipo 3 (Azuis): Nenhum;
 - Tipo 4 (Amarelas): 1;
- Altura fixa no eixo Z:
 - Tipo 1 (Vermelhas): Sim;
 - Tipo 2 (Verdes): Não;
 - Tipo 3 (Azuis): Não;
 - Tipo 4 (Amarelas): Não;

Segue abaixo o número de variáveis e restrições utilizadas, em que $n = 8$ representa o número de caixas neste teste.

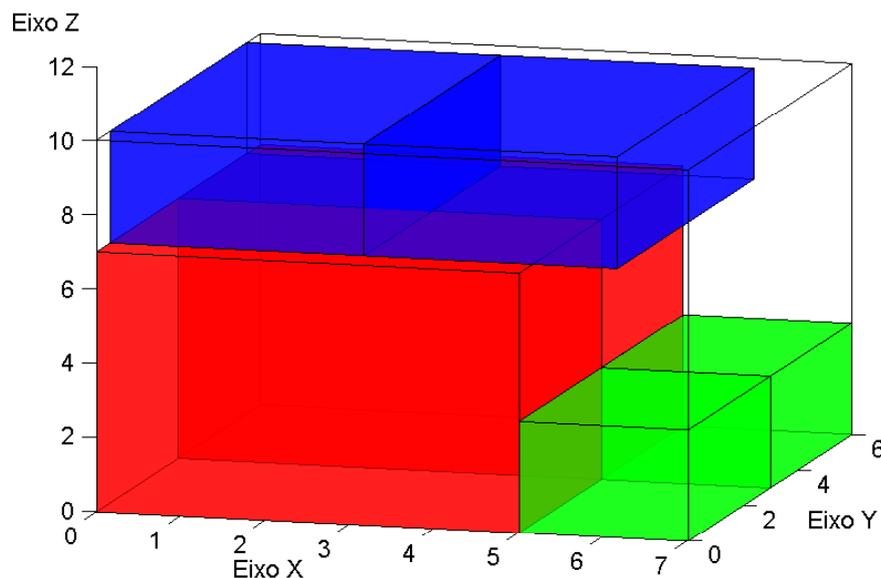
- Número de Variáveis = $17 \cdot n + 10 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 696$;
 - Reais = $6 \cdot n = 48$;
 - Binárias = $11 \cdot n + 10 \cdot (n) \cdot (n - 1) = 648$;

- Número de Restrições = $25 \cdot n + 19 \cdot n \cdot (n - 1) + 7 = 1271$;

Resultados:

- Volume de caixas armazenado = 336;
- Tempo = 0.45 segundos;
- Iterações = 1076;
- Nós Explorados = 0;

Figura 24: Resultado do Caso de Uso 3 - Modelo com Restrições de altura fixa, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade vertical, carregamento completo de grupos de caixas, limite e distribuição de peso no contêiner



Fonte: autoria própria

Ao comparar a Figura 24 com a Figura 23, é possível destacar várias mudanças no resultado provocadas pelas restrições práticas adicionadas, são elas:

- As duas caixas vermelhas foram colocadas com o lado de tamanho 7 paralelo ao eixo Z, pois foi indicado que deveriam estar com a altura fixa;
- As duas caixas verdes foram alocadas por terem maior prioridade que as azuis e as amarelas;
- Como foi visto no primeiro teste, não é possível alocar todas as caixas. Portanto deve-se retirar caixas azuis ou amarelas, que são as de menor prioridade. Pelo volume é mais

vantajoso retirar uma amarela, contudo elas são um grupo. Assim, retirar as duas daria um resultado pior do que retirar uma azul. Entretanto, a restrição de peso máximo do contêiner impede que se leve todas as caixas e deixe apenas uma azul de fora. Com isso, a solução para levar um maior volume e respeitar as restrições de limite de peso e de carregamento completo de grupos incluiu as duas caixas azuis e retirou as duas amarelas;

- Todas as caixas tem o centro de sua face inferior apoiado pelo piso do contêiner ou por outras caixas, conforme a restrição de estabilidade vertical;
- As caixas vermelhas estão sobre nenhuma outra caixa e suportam as caixas azuis, de acordo com a restrição de empilhamento;
- A ordem de entrega foi respeitada: as caixas verdes podem ser retiradas primeiro pela porta do contêiner (face direita da imagem 24), as caixas azuis podem ser retiradas em seguida e por fim as vermelhas.
- O centro de massa do contêiner está aproximadamente nas coordenadas $X=3,267$, $Y=3$, $Z=3,767$, respeitando os limites estabelecidos para a distribuição de peso no contêiner.

Não foram incluídas as restrições de estabilidade horizontal (nos eixos X e Y) para esse caso de uso, pois ao fazê-lo o modelo ficava sem solução.

5 Conclusão

Este trabalho apresentou um modelo de programação linear inteira mista para o problema de carregamento de contêineres com restrições práticas de orientação, múltiplos destinos, empilhamento, prioridade, estabilidade e carregamento completo de grupos de caixas, além de limite e distribuição de peso no contêiner.

Viu-se que embora restrições práticas sejam importantes para aplicação dos modelos em casos reais, há ainda poucos modelos que possuam outras que não sejam as de orientação. Portanto, torna-se importante o trabalho desenvolvido por permitir aplicar o modelo utilizando as restrições práticas desejadas, individualmente ou combinadas, de forma que se adeque a cada caso.

O modelo obtido, em sua forma mais simples, possui restrições para não sobreposição e para permitir diferentes orientações para as caixas, sendo composto por $13 \cdot n + 3 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $9 \cdot n + 3,5 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições. Para tratar a orientação de caixas em que o lado definido como altura deve estar na vertical deve-se adicionar mais n restrições. Para o limite de peso no contêiner adiciona-se mais 1 restrição. Já para a distribuição de peso no contêiner são adicionadas $3 \cdot n$ variáveis e $12 \cdot n + 6$ restrições. Se desejar incluir o carregamento completo de grupos de caixas são $n \cdot (n - 1)$ restrições a mais.

Já se quiser tratar prioridade entre caixas são $0,5 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições. Para levar em consideração múltiplos destinos são $5 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $7 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições. Para tratar o empilhamento de caixas adiciona-se $5 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $n + 6 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições. Quanto a estabilidade, para considerá-la em apenas um sentido são $n + 6 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $2 \cdot n + 7 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições a mais, já para adotá-la nos 5 sentidos implementados (sentido negativo do eixo Z, negativo e positivo dos eixos X e Y) seriam $5 \cdot n + 14 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $10 \cdot n + 19 \cdot n \cdot (n - 1)$ restrições. Porém, algumas variáveis e restrições são usadas por mais de uma restrição prática, o modelo completo possui $21 \cdot n + 18 \cdot n \cdot (n - 1)$ variáveis e $33 \cdot n + 31 \cdot n \cdot (n - 1) + 7$ restrições.

Nas restrições de empilhamento e estabilidade, foi-se considerado que uma caixa estava sendo apoiada quando seu centro estava sendo apoiado. Isso possibilitou criar um modelo de otimização de posicionamento contínuo, mas tem-se o problema de que uma caixa pode estar apoiada por outra mas não estar apoiada indiretamente pelo contêiner.

Também foi visto como o crescimento do número de variáveis e restrições do modelo é grande, aumentando quadraticamente com o número de caixas. Com isso, o uso deste torna-se limitado a casos com um pequeno número de caixas, devendo ser escolhidas somente as restrições práticas necessárias a fim de que o tempo para solucioná-lo seja adequado.

Outro problema em se utilizar muitas restrições é que o modelo pode ficar sem solução, nesses casos deve-se flexibilizar mais o resultado desejado, seja alterando os valores das constantes (como os limites para as coordenadas do centro de massa do contêiner) ou

retirando alguma restrição prática menos importante (como não utilizar estabilidade para todos os sentidos).

Para trabalhos futuros, espera-se que sejam feitas estimativas quanto ao tempo médio de processamento para números de caixas e combinações de restrições práticas variados, e que se compare com os modelos propostos na literatura. Também é interessante que se implemente outras das restrições destacadas na Tabela 1, a saber: Manuseio, Agrupamento de itens, Separação de itens e Complexidade do padrão de empilhamento, para que mais casos práticos possam ser atendidos pelo modelo. Além disso, espera-se que seja analisada a aplicabilidade do modelo à medida que o número de caixas cresce. E por fim, espera-se que sejam feitas pesquisas de campo para observar a aplicabilidade e a eficiência do modelo em casos reais.

Referências

- ALLEN, S. D.; BURKE, E. K.; KENDALL, G. A hybrid placement strategy for the three-dimensional strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 209, n. 3, p. 219–227, 2011. Citado na página 13.
- BALLOU, R. H. *Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos-: Logística Empresarial*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado na página 11.
- BANSAL, N. et al. Harmonic algorithm for 3-dimensional strip packing problem. In: SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS. *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. [S.l.], 2007. p. 1197–1206. Citado na página 13.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado nas páginas 8, 14 e 15.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H. Zur behandlung von restriktionen bei der stauraumoptimierung am beispiel eines genetischen algorithmus für das containerbeladeproblem. In: *Logistik Management*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 83–100. Citado na página 38.
- BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. et al. *Container loading problems: A state-of-the-art review*. [S.l.]: Univ., Faculty of Economics and Management, 2012. Citado nas páginas 11, 12, 13, 15, 31 e 38.
- CHE, C. H. et al. The multiple container loading cost minimization problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 214, n. 3, p. 501–511, 2011. Citado na página 13.
- CHEN, C.; LEE, S.-M.; SHEN, Q. An analytical model for the container loading problem. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 80, n. 1, p. 68–76, 1995. Citado na página 13.
- FEKETE, S. P.; SCHEPERS, J.; VEEN, J. C. Van der. An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing. *Operations Research, INFORMS*, v. 55, n. 3, p. 569–587, 2007. Citado na página 13.
- GILMORE, P.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research, INFORMS*, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado na página 13.
- GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 2, p. 179–190, 2012. Citado na página 13.
- GUIMARÃES, M. V. A. *Um Modelo Eficiente para o Problema de Carregamento de Contêineres*. 2015. Trabalho de conclusão do curso de Engenharia de Computação publicado no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Citado nas páginas 17 e 18.
- HIFI, M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: a comparative study. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 31, n. 5, p. 657–674, 2004. Citado na página 13.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à pesquisa operacional*. 9a edição. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2013. Citado nas páginas 15 e 16.

- JANSEN, K.; SOLIS-OBA, R. An asymptotic approximation algorithm for 3d-strip packing. In: SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS. *Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm*. [S.l.], 2006. p. 143–152. Citado na página 13.
- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Modelos de otimização para problemas de carregamento de contêineres com considerações de estabilidade e de empilhamento. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 30, n. 1, p. 73–98, 2010. Citado nas páginas 14 e 33.
- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012. Citado na página 13.
- LI, K.; CHENG, K. H. Heuristic algorithms for on-line packing in three dimensions. *Journal of Algorithms*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 589–605, 1992. Citado na página 13.
- LIN, J.-L.; CHANG, C.-H.; YANG, J.-Y. A study of optimal system for multiple-constraint multiple-container packing problems. In: SPRINGER. *International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems*. [S.l.], 2006. p. 1200–1210. Citado na página 31.
- MACK, D.; BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 11, n. 5, p. 511–533, 2004. Citado na página 31.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000. Citado na página 13.
- MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Three-dimensional packings with rotations. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 2801–2815, 2009. Citado na página 13.
- MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. *OR spectrum*, Springer, v. 31, n. 4, p. 775–800, 2009. Citado na página 13.
- NOVAES, A. *Logística e Gerenciamento da Cadeia de Distribuição-4ª Edição*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2004. Citado na página 11.
- OPTIMIZATION, I. G. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2015. Disponível em: <<http://www.gurobi.com>>. Citado na página 19.
- PADBERG, M. Packing small boxes into a big box. *Mathematical Methods of Operations Research*, Springer, v. 52, n. 1, p. 1–21, 2000. Citado na página 13.
- PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 382–392, 2002. Citado na página 14.
- TSAI, D.-M. Modeling and analysis of three-dimensional robotic palletizing systems for mixed carton sizes. Digital Repository@ Iowa State University, <http://lib.dr.iastate.edu/>, 1987. Citado na página 13.